ANALISIS ESTRUCTURAL

Dr. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

ASAMBLEA NACIONAL DE RECTORES

Lima – Perú

2009

El Análisis Estructural, es una ciencia que estudia la resistencia, rigidez, estabilidad, durabilidad y seguridad en las obras. Por lo general, los textos base de Análisis Estructural, son muy voluminosos y, principalmente, se centran en la descripción teórica, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje a través de trabajos domiciliarios e investigación, conducentes a un mejor dominio de la materia.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la realización de sus trabajos domiciliarios.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, describiendo, para ello, la teoría en forma sucinta, seria y con el rigor científico y resolviendo en forma detallada problemas tipo, donde se abarque todo el desarrollo de un capítulo en un solo problema, propiciando de manera más amena la convivencia con el Análisis Estructural.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de programas de las universidades no se analizan y que son muy importantes en la formación profesional de los ingenieros civiles.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Análisis Estructural en Moscow State Civil Engineering University, Universidad de San Martín de Porres de Lima y Universidad Privada Antenor Orrego de Trujillo.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de su descripción teórica, como en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de una introducción, 10 capítulos, bibliografía y anexo.

En la introducción se fundamenta la actualidad del curso y se dan las líneas de investigación del Análisis Estructural como ciencia.

En el primer capítulo se analizan arcos triarticulados con y sin tirante, ante cargas estáticas y movibles, graficando las líneas de influencia de las reacciones y fuerzas internas.

En el segundo capítulo se calculan armaduras isostáticas ante cargas estáticas y movibles, graficando sus líneas de influencia.

En el tercer capítulo se analizan pórticos hiperestáticos por el método de las fuerzas, considerando los efectos de simetría, variación de temperatura y asentamiento o desplazamiento de los apoyos.

En el cuarto capítulo se calculan vigas continuas por la ecuación de los tres momentos y método de los momentos focales, graficando sus líneas de influencia de las reacciones y fuerzas internas.

En el quinto capítulo se analizan armaduras hiperestáticas ante cargas estáticas y movibles, graficando sus líneas de influencia.

En el sexto capítulo se calculan pórticos hiperestáticos por el método de desplazamientos, tanto en forma descompuesta, como canónica y considerando el efecto de simetría.

En el sétimo capítulo se analizan vigas sobre bases elásticas por el modelo de Winkler, comparando los resultados analíticos con los del programa BEAM.

En el octavo capítulo se calculan estructuras de paredes delgadas, basados en la teoría de Vlasov, graficando sus diagramas de fuerzas internas y esfuerzos.

En el noveno capítulo se analiza la estabilidad estructural de pórticos hiperestáticos simétricos y no simétricos, a través del método de desplazamientos.

En el décimo capítulo se analiza la dinámica estructural de pórticos hiperestáticos, a través del método de las fuerzas y analizando las vibraciones libres y forzadas.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten los cursos de Análisis Estructural; así como a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis colegas y amigos de la Cátedra de Mecánica Estructural de Kiev National University of Building and Architecture, lugar donde me formé académicamente y pude compartir con verdaderos genios de prestigio mundial, como son los científicos D.Sc., Prof. Amiro I.Ya.; D.Sc., Prof. Bazhenov V.A.; D.Sc., Prof. Dejtiariuk E.S.; D.Sc., Prof. Guliar O.I.; D.Sc., Prof. Granat S.Ya.; D.Sc., Prof. Isajanov G.V.; D.Sc., Prof. Kovneristov G.B.; D.Sc., Prof. Shishov O.V.; D.Sc., Prof. Verizhenko V.E.; Ph.D., Prof. Demianiuk R.K.; Ph.D., Prof. Melnichenko G.I.; Ph.D., Prof. Sajarov O.S. y Ph.D., Prof. Zhdan V.Z.; de quienes aprendí este maravilloso mundo de la Mecánica Estructural y sentaron las bases sólidas en mi formación científica.

De manera muy especial, dedico el presente libro a mi hermana Verónica, por ser ejemplo de juventud divino tesoro, que me inspira y transmite diariamente energía renovada, permitiéndome aportar a un desarrollo integral de la sociedad.

Dr. Genner Villarreal Castro

genner_vc@rambler.ru

Lima, Julio del 2009

INTRODUCCION

El Análisis Estructural, es una ciencia que se encarga de la elaboración de métodos de cálculo, para determinar la resistencia, rigidez, estabilidad, durabilidad y seguridad de las estructuras, obteniéndose los valores necesarios para un diseño económico y seguro.

Como ciencia, el análisis estructural inició su desarrollo en la primera mitad del siglo XIX, con la activa construcción de puentes, vías ferroviarias, presas y naves industriales. La inexistencia de métodos de cálculo de tal tipo de estructuras, no permitió proyectar estructuras ligeras, económicas y seguras.

En el Análisis Estructural clásico, se analizan solamente sistemas de barras. Esto originó en cierto modo la aparición de nuevos cursos especiales de análisis estructural, donde se analizan otros tipos de sistemas estructurales. Es así, como surgió el "Análisis Estructural de Barcos", "Análisis Estructural de Aviones", donde se analizan placas y bóvedas y "Análisis Estructural de Cohetes", que se orienta al cálculo de bóvedas simétricas. En estos cursos, se utilizan los métodos de la Teoría de Elasticidad, los cuales son más complejos que los métodos clásicos del Análisis Estructural.

En el Análisis Estructural se resuelven estructuras en el plano y en el espacio. Los problemas planos se resuelven en dos dimensiones y los espaciales en tres dimensiones. Generalmente, para el cálculo de estructuras espaciales se tiende a dividir en elementos planos, debido a que su cálculo es mucho más sencillo, pero no en todos los casos es posible dicha metodología. Esto se debe, a que la mayoría de los métodos principales y teoremas están enunciados y modelados para estructuras en el plano. En cambio, para el cálculo de estructuras espaciales, será necesario analizar grandes fórmulas y ecuaciones, lo que dificulta su metodología, pero en la actualidad, con el uso de la informática, esto es más sencillo, siendo muy importante la interpretación de los resultados.

Asimismo, el Análisis Estructural se divide en problemas lineales y no-lineales, distinguiéndose la no-linealidad geométrica y no-linealidad física. La no-linealidad geométrica surge cuando existen grandes desplazamientos y deformaciones de los elementos, lo que es característico en puentes de grandes luces y edificios altos. La no-linealidad física se produce cuando no existe una dependencia proporcional entre los esfuerzos y deformaciones, esto es, cuando se utilizan materiales inelásticos, lo que es característico en todas las construcciones. Cuando los esfuerzos son pequeños, la dependencia no-lineal física se puede reemplazar por una lineal.

También se distinguen los problemas estáticos y dinámicos. En estos últimos, se consideran las propiedades inerciales de las estructuras, expresados a través de derivadas respecto al tiempo. A estos, también, se pueden agregar los problemas relacionados con la viscosidad del material, el escurrimiento o flujo plástico y la resistencia durante el tiempo. De esta manera, existe el Análisis Estructural de sistemas fijos y movibles, que se estudian bajo los lineamientos de la Estabilidad Estructural, Dinámica Estructural y Teoría de Escurrimiento.

Una nueva línea de investigación del Análisis Estructural, es el estudio de sistemas con parámetros casuales, es decir, aquella magnitud que puede ser considerada con determinada probabilidad. El cálculo estructural probabilístico, se estudia en la Teoría de Seguridad y viene a ser parte integrante del Análisis Estructural.

Otra de las líneas de investigación del Análisis Estructural, es la interacción suelo-estructura, analizándose las construcciones con un nuevo enfoque integrador suelo-cimentación-superestructura, lo

cual describe el trabajo real de las obras, considerándose al suelo como un semiespacio elástico, lo que influye en la redistribución de esfuerzos por toda la construcción. Esta línea de investigación usa los modelos matemáticos y físicos, teniendo aún un sinnúmero de espectros por resolver, que merecen un trabajo científico serio.

En el Análisis Estructural se calculan armaduras, vigas, pórticos, arcos, losas, placas, bóvedas, cúpulas, cascarones, reservorios, puentes, cables, estructuras sobre bases elásticas e inelásticas, membranas y otros.

CAPITULO 1
ARCOS TRIARTICULADOS

1.1 ANALISIS CINEMATICO

Un arco triarticulado plano, es un sistema estáticamente determinado, formado por dos barras curvas y unidas por una articulación o rótula.

La condición de estabilidad geométrica del arco se comprueba por la siguiente fórmula:

$$G.I. = 3D - 2A - R \qquad (1.1)$$

Donde:

$G.I.$ - grado de indeterminación del sistema;

D - número de discos;

A - número de articulaciones o rótulas simples;

R - número de reacciones.

El arco sin tirante (refuerzo) unido a la cimentación (tierra) forma tres discos unidos por tres articulaciones, que no están en una misma línea (figura 1.1).

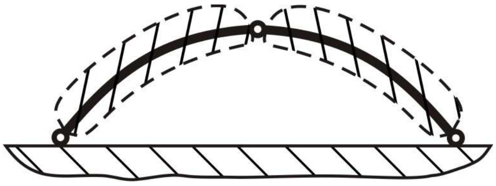


Fig. 1.1

Tal sistema estructural, ante la acción de cargas verticales posee componente de reacción horizontal, llamado *empuje*.

El arco con tirante está formado por dos discos, unidos por una articulación y una barra, cuyo eje no pasa por la rótula (figura 1.2).

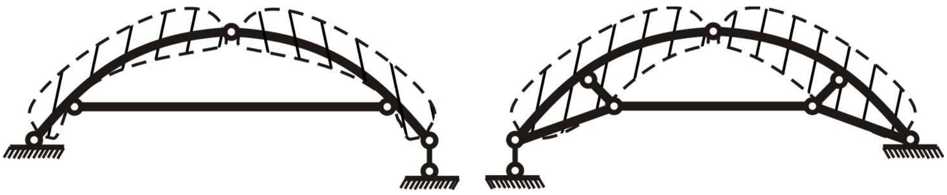


Fig. 1.2

Las reacciones en los apoyos y los métodos de cálculo son los mismos que cuando se trata de una viga simple. En el caso del tirante, el empuje lo absorbe dicho elemento y no los apoyos.

1.2 CALCULO ANALITICO

1.2.1 METODOLOGIA DE CÁLCULO

En el arco sin tirante, las reacciones verticales se determinan a partir de la sumatoria de momentos respecto a los apoyos (figura 1.4).

$$\sum M_A = 0 \qquad (1.2)$$

$$\sum M_B = 0$$

La componente horizontal de la reacción se determina a partir de la ecuación de la sumatoria de momentos respecto a la articulación C, analizando la parte izquierda o derecha del arco.

$$\sum M_C = 0 \qquad (1.3)$$

El momento flector en tal punto del arco es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas ubicadas a un lado de la sección, es decir, izquierda o derecha.

La fuerza cortante en tal sección es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas, ubicadas a un lado de la sección, sobre el eje perpendicular a la tangente que forma con el eje del arco.

La fuerza axial o normal en tal sección es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas, ubicadas a un lado de la sección, sobre el eje paralelo a la tangente que forma con el eje del arco.

El momento flector es positivo si tracciona las fibras inferiores del arco y es negativo en caso opuesto. Las fuerzas cortantes serán positivas si gira en sentido horario la sección analizada del arco. En caso contrario será negativa.

La fuerza normal es positiva en el caso de tracción y negativa en compresión.

Para efectos de cálculo se divide el arco en tramos, cuyo número no debe ser menor de ocho.

Los momentos flectores, fuerzas cortantes y fuerzas axiales en una determinada sección y bajo la acción de fuerzas verticales, se determinarán a través de la siguiente fórmula:

$$M_K = M_K^v - H.y$$

$$V_K = V_K^v \cos\varphi - H\operatorname{sen}\varphi \qquad (1.4)$$

$$N_K = -(V_K^v \operatorname{sen}\varphi + H\cos\varphi)$$

Donde:

M_K^v, V_K^v - momento y fuerza cortante en la sección “K” de la viga simplemente apoyada con longitud igual a la luz del arco;

y - ordenada, calculada de la línea que une los apoyos hasta el centro de la sección analizada (hasta el eje del arco);

φ - ángulo que forma la tangente en un punto determinado con el eje del arco y la línea horizontal;

H - empuje del arco.

Cuando el arco es reforzado con tirantes, los valores de M_K, V_K y N_K hasta el nivel del tirante, se determinan por la fórmula 1.4 cuando $H = 0$ y superior al nivel del refuerzo, también se calculan por dicha fórmula, pero con la condición que $H \neq 0$, siendo H la fuerza en el tirante y la ordenada $"y"$ se calculará a partir del nivel del refuerzo. Para determinar la fuerza que surge en el tirante, se hace un corte y se elaboran las ecuaciones de momentos de las fuerzas ubicadas a la izquierda o derecha (así como el del tirante) de la articulación C, en forma análoga a la obtención del empuje del arco sin refuerzo por la fórmula 1.3.

El ángulo φ se determina a partir de la relación $tg\varphi = \frac{dy}{dx}$, donde $y = f(x)$ es la ecuación de la forma del arco.

Si el arco tiene forma de parábola cuadrática, entonces:

$$y = \frac{4f}{L^2} x(L - x) \qquad (1.5)$$

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x)$$

En el caso que el arco tenga la forma sinoidal, se tendrá:

$$y = f sen \frac{\pi.x}{L} \qquad (1.6)$$

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi.f}{L} \cos \frac{\pi.x}{L}$$

Para el caso de arco, cuyo eje tiene la forma de un arco de circunferencia (figura 1.3), es mejor trabajar con las siguientes ecuaciones:

$$x = r(sen\alpha - sen\varphi) \qquad (1.7)$$

$$y = r(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

Siendo:

$$sen\alpha = \frac{L}{2r}$$

$$\cos\alpha = \frac{r - f}{r}$$

$$r = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

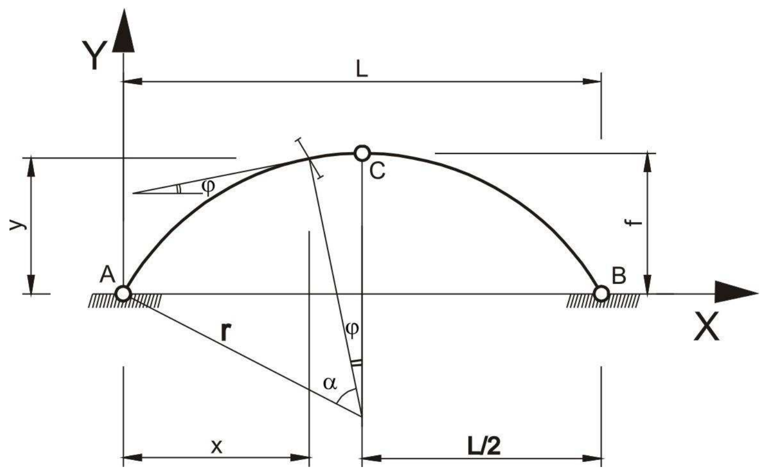


Fig. 1.3

1.2.2 CALCULO DE ARCO SIN TIRANTE

Se pide analizar un arco triarticulado sin tirante, tal como se muestra en la figura 1.4, siendo la ecuación de su eje tipo sinoidal.

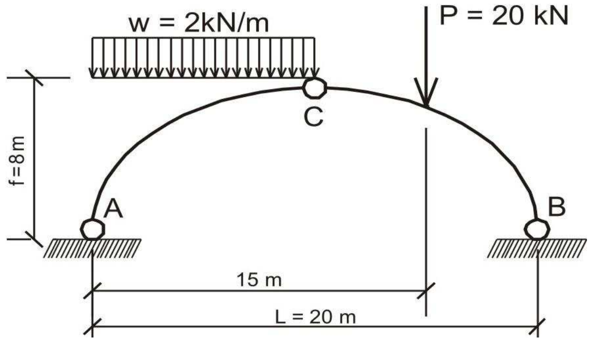


Fig. 1.4

Iniciamos el cálculo, determinando las características geométricas de su eje, siendo la ecuación del eje del arco la siguiente (fórmula 1.6):

$$y = 8 \operatorname{sen} \frac{\pi . x}{20} \qquad (1.8)$$

Se toma como inicio de las coordenadas el centro del apoyo A. El ángulo de inclinación de la tangente en dicho punto respecto a la línea horizontal se determina también por la fórmula 1.6:

$$tg\varphi = \frac{\pi .8}{20} \cos \frac{\pi . x}{20} = 1{,}257 \cos \frac{\pi . x}{20} \qquad (1.9)$$

Generalmente, la luz del arco se divide en 8 a 16 intervalos iguales. En este caso asumimos 10 intervalos de 2m cada uno. Como resultado tenemos 11 secciones regulares, en las cuales se deben de calcular sus características geométricas y diagramas de fuerzas internas. También es necesario calcular las secciones infinitamente cercanas al punto de acción de la carga puntual, es decir, a la izquierda (-0) y a la derecha (+0), siendo en total 13 secciones de cálculo, tal como se muestra en la figura 1.5,a.

Los resultados de cálculo se dan en la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Nº de sección	x (m)	y (m)	$tg\varphi$	φ (rad)	$sen\varphi$	$\cos\varphi$
1	0	0	1,257	0,900	0,783	0,622
2	2	2,47	1,195	0,874	0,767	0,642
3	4	4,70	1,017	0,794	0,713	0,701
4	6	6,47	0,739	0,636	0,594	0,804
5	8	7,61	0,388	0,370	0,362	0,932
6	10	8	0	0	0	1
7	12	7,61	-0,388	-0,370	-0,362	0,932
8	14	6,47	-0,739	-0,636	-0,594	0,804
9-0	15	5,66	-0,889	-0,726	-0,664	0,747
9+0	15	5,66	-0,889	-0,726	-0,664	0,747
10	16	4,70	-1,017	-0,794	-0,713	0,701
11	18	2,47	-1,195	-0,874	-0,767	0,642
12	20	0	-1,257	-0,900	-0,783	0,622

Determinamos las reacciones de los apoyos, a partir de las ecuaciones de equilibrio del arco:

$$\sum M_A = 0; \qquad 2.10.5 + 20.15 - V_B.20 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 20kN \uparrow$$

$$\sum M_B = 0; \qquad V_A.20 - 2.10.15 - 20.5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = 20kN \uparrow$$

Realizamos el control de los cálculos efectuados:

$$\sum F_y = 0; \qquad 20 + 20 - 2.10 - 20 = 0$$

El empuje lo determinamos a través de la fórmula 1.3:

$$\sum M_C^{izq} = 0; \qquad 2.10.5 - 20.10 + H.8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H = 12{,}5kN \rightarrow$$

Para determinar las fuerzas internas utilizamos la fórmula 1.4. El resultado de los cálculos se muestra en la tabla 1.2.

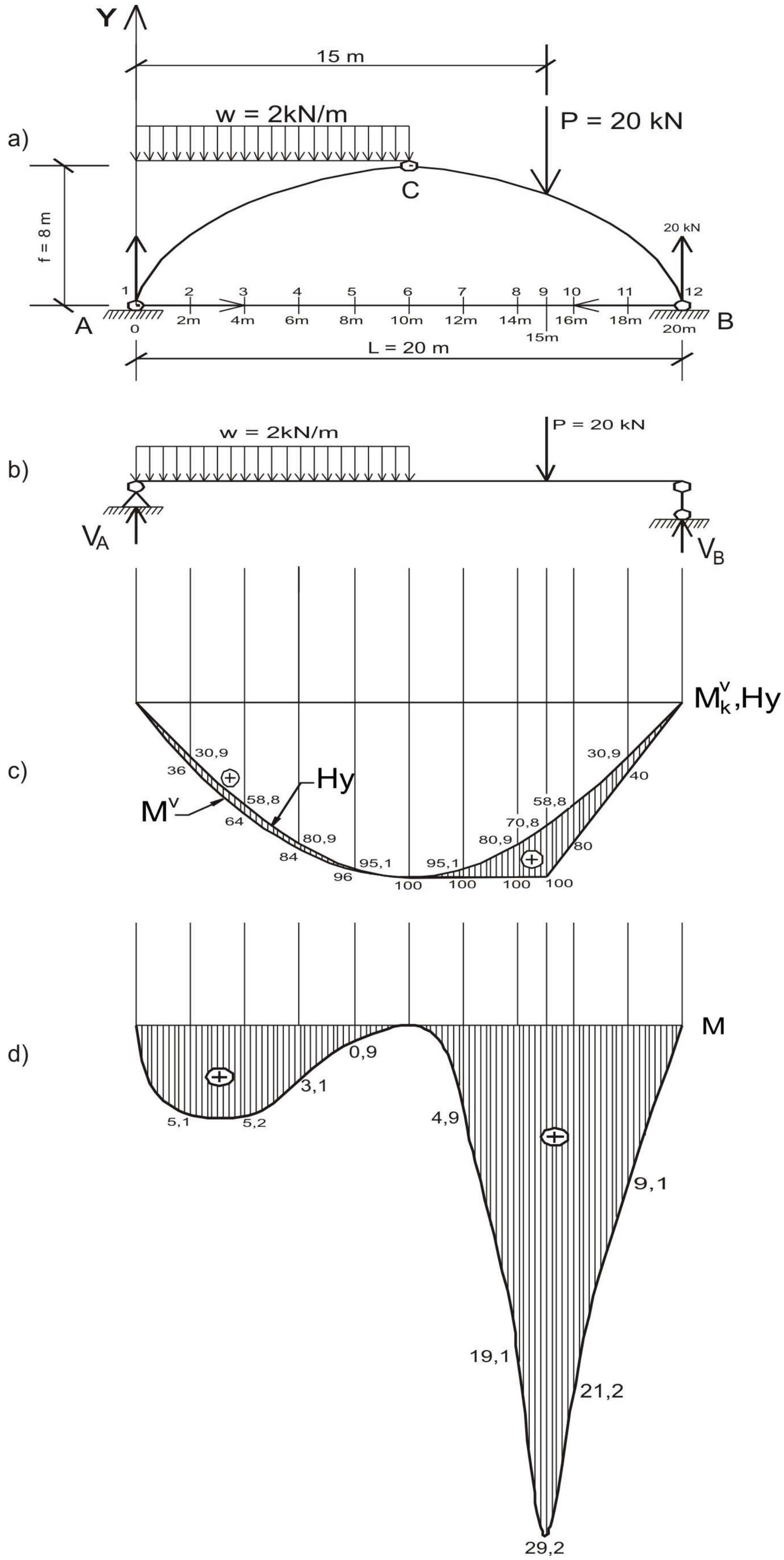
Tabla 1.2

Nº	M_K^v (kN.m)	$-H.y$ (kN.m)	M_K (kN.m)	V_K^v (kN)	$V_K^v\cos\varphi$ (kN)	$-H\text{sen}\varphi$ (kN)	V_K (kN)	$V_K^v\text{sen}\varphi$ (kN)	$H\cos\varphi$ (kN)	N_K (kN)
1	0	0	0	20,0	12,4	-9,8	2,6	15,7	7,8	-23,5
2	36,0	-30,9	5,1	16,0	10,3	-9,6	0,7	12,3	8,0	-20,3
3	64,0	-58,8	5,2	12,0	8,4	-8,9	-0,5	8,6	8,8	-17,4
4	84,0	-80,9	3,1	8,0	6,4	-7,4	-1,0	4,7	10,1	-14,8
5	96,0	-95,1	0,9	4,0	3,7	-4,5	-0,8	1,4	11,7	-13,1
6	100,0	-100	0	0	0	0	0	0	12,5	-12,5
7	100,0	-95,1	4,9	0	0	4,5	4,5	0	11,7	-11,7
8	100,0	-80,9	19,1	0	0	7,4	7,4	0	10,1	-10,1
9-0	100,0	-70,8	29,2	0	0	8,3	8,3	0	9,3	-9,3
9+0	100,0	-70,8	29,2	-20,0	-14,9	8,3	-6,6	13,3	9,3	-22,6
10	80,0	-58,8	21,2	-20,0	-14,0	8,9	-5,1	14,3	8,8	-23,1
11	40,0	-30,9	9,1	-20,0	-12,8	9,6	-3,2	15,3	8,0	-23,3
12	0	0	0	-20,0	-12,4	9,8	-2,6	15,7	7,8	-23,5

Todos los esquemas de cálculo y diagramas de fuerzas internas se muestran en la figura 1.5:

a) El arco con sus cargas, dimensiones y secciones de cálculo.
b) La viga correspondiente al arco triarticulado, con la misma luz y las mismas cargas.
c) Los diagramas de momento flector en la viga M_K^v y $H.y$.
d) El diagrama de momento flector del arco M_K.
e) El diagrama de fuerza cortante en la viga V_K^v.
f) Los diagramas $V_K^v\cos\varphi$ y $-H\text{sen}\varphi$.
g) El diagrama de fuerza cortante en el arco V_K.
h) Los diagramas $V_K^v\text{sen}\varphi$ y $H\cos\varphi$.

i) El diagrama de fuerza axial o normal del arco N_K .



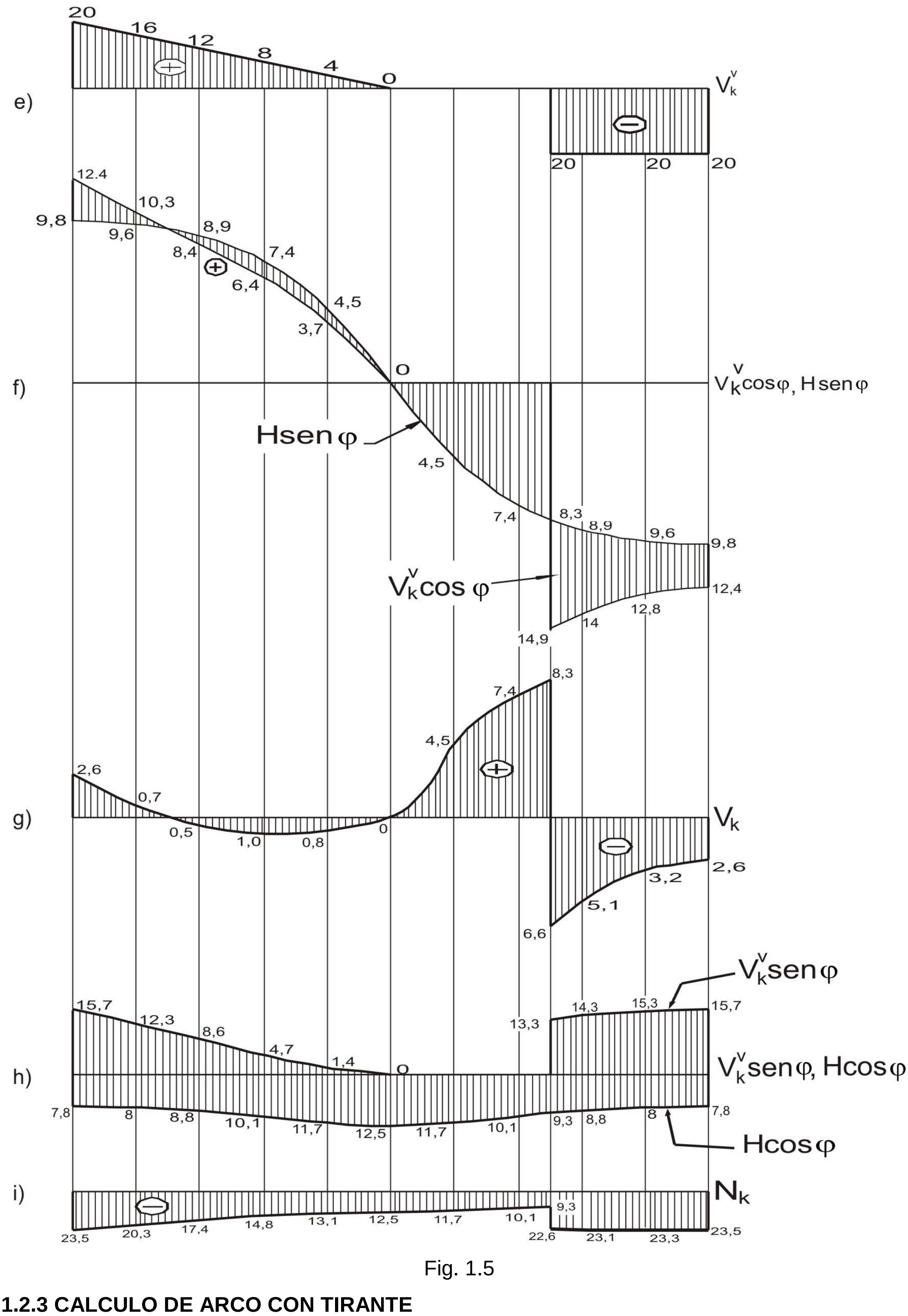


Fig. 1.5

1.2.3 CALCULO DE ARCO CON TIRANTE

Determine en forma analítica las fuerzas internas en el arco triarticulado con tirante y grafique el diagrama de esfuerzos normales en la sección más peligrosa, considerando que es rectangular. El eje del arco tiene la forma sinoidal (figura 1.6).

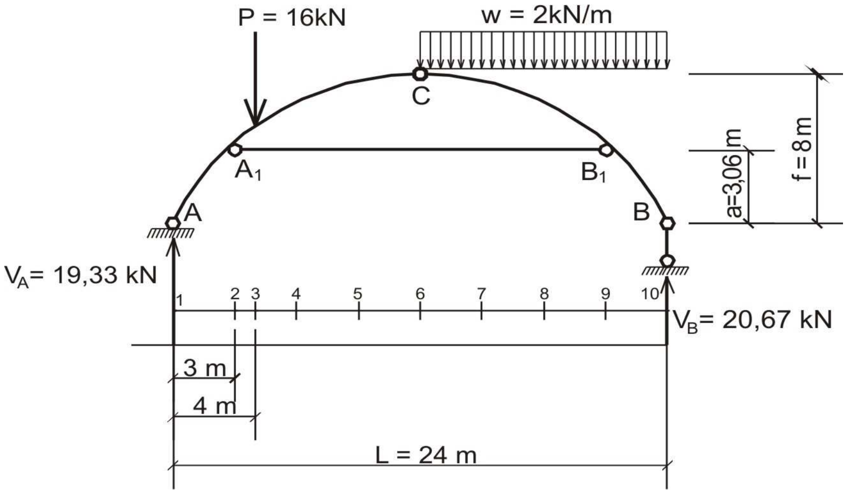


Fig. 1.6

El cálculo lo iniciamos determinando las características geométricas del eje del arco, tan igual como en el problema anterior.

Dividimos el eje del arco en 8 partes y al punto donde se aplica la carga puntual elegimos una sección adicional (figura 1.6, sección 3).

Calculamos las características geométricas del eje del arco, por ejemplo en la sección 7, cuando $x = 15m$ y a partir de la fórmula 1.6 tenemos:

$$y = 8sen\frac{180.15}{24} = 7{,}39m$$

$$tg\varphi = \frac{\pi.8}{24}\cos\frac{180.15}{24} = -0{,}401$$

Las características geométricas de los puntos del arco se muestran en la tabla 1.3.

Tabla 1.3

Nº de sección	x (m)	y (m)	$tg\varphi$	φ (grad)	$sen\varphi$	$\cos\varphi$
1	0	0	1,047	$46{,}32^0$	0,723	0,691
2-0	3	3,06	0,967	$44{,}04^0$	0,695	0,719
2+0	3	3,06	0,967	$44{,}04^0$	0,695	0,719
3-0	4	4,00	0,907	$42{,}21^0$	0,672	0,741
3+0	4	4,00	0,907	$42{,}21^0$	0,672	0,741
4	6	5,66	0,740	$36{,}50^0$	0,595	0,804
5	9	7,39	0,401	$21{,}85^0$	0,372	0,928
6	12	8,00	0	0^0	0	1,000
7	15	7,39	-0,401	$-21{,}85^0$	-0,372	0,928
8	18	5,66	-0,740	$-36{,}50^0$	-0,595	0,804
9-0	21	3,06	-0,967	$-44{,}04^0$	-0,695	0,719
9+0	21	3,06	-0,967	$-44{,}04^0$	-0,695	0,719
10	24	0	-1,047	$-46{,}32^0$	-0,723	0,691

Como el ángulo φ del semiarco de la derecha CB se encuentra en el cuarto cuadrante, es, por ello, que el $\text{sen}\varphi$ es negativo.

Determinamos las reacciones en los apoyos a partir de las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_A = 0; \qquad 16.4 + 2.12.18 - V_B.24 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 20{,}67 kN \uparrow$$

$$\sum M_B = 0; \qquad -16.20 - 2.12.6 + V_A.24 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 19{,}33 kN \uparrow$$

Realizamos el control de los cálculos efectuados:

$$\sum F_y = 0; \qquad 20{,}67 + 19{,}33 - 16 - 2.12 = 0$$

La fuerza interna en el tirante se determina de la condición que el momento flector en la articulación C es cero:

$$\sum M_C = 0; \qquad 19{,}33.12 - 16.8 - H.4{,}94 = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 21{,}04 kN \rightarrow$$

Para determinar las fuerzas internas en las secciones transversales del arco utilizamos la fórmula 1.4:

$$M_K = M_K^v - H(y - a)$$

$$V_K = V_K^v \cos\varphi - H\text{sen}\varphi$$

$$N_K = -(V_K^v \text{sen}\varphi + H\cos\varphi)$$

Donde:

a - distancia de la línea de los apoyos AB hasta el tirante.

Los resultados del cálculo se muestran en la tabla 1.4.

Tabla 1.4

Nº	M_K^v (kN.m)	$-H(y-a)$ (kN.m)	M_K (kN.m)	V_K^v (kN)	$V_K^v \cos\varphi$ (kN)	$-H\text{sen}\varphi$ (kN)	V_K (kN)	$V_K^v \text{sen}\varphi$ (kN)	$H\cos\varphi$ (kN)	N_K (kN)
1	0	0	0	19,33	13,36	0	13,36	13,98	0	-13,98
2-0	58,00	0	58,00	19,33	13,90	0	13,90	13,43	0	-13,43
2+0	58,00	0	58,00	19,33	13,90	-14,62	-0,72	13,43	15,13	-28,56
3-0	77,32	-19,78	57,54	19,33	14,32	-14,14	0,18	12,99	15,59	-28,58
3+0	77,32	-19,78	57,54	3,33	2,47	-14,14	-11,67	2,24	15,59	-17,83
4	83,98	-54,70	29,28	3,33	2,68	-12,52	-9,84	1,98	16,92	-18,90
5	93,97	-91,10	2,87	3,33	3,09	-7,83	-4,74	1,24	19,53	-20,77
6	103,96	-103,96	0	3,33	3,33	0	3,33	0	21,04	-21,04
7	105,03	-91,10	13,93	-2,67	-2,48	7,83	5,35	0,99	19,53	-20,52
8	88,02	-54,70	33,32	-8,67	-6,97	12,52	5,55	5,16	16,92	-22,08
9-0	53,01	0	53,01	-14,67	-10,55	14,62	4,07	10,20	15,13	-25,33
9+0	53,01	0	53,01	-14,67	-10,55	0	-10,55	10,20	0	-10,20
10	0	0	0	-20,67	-14,28	0	-14,28	14,94	0	-14,94

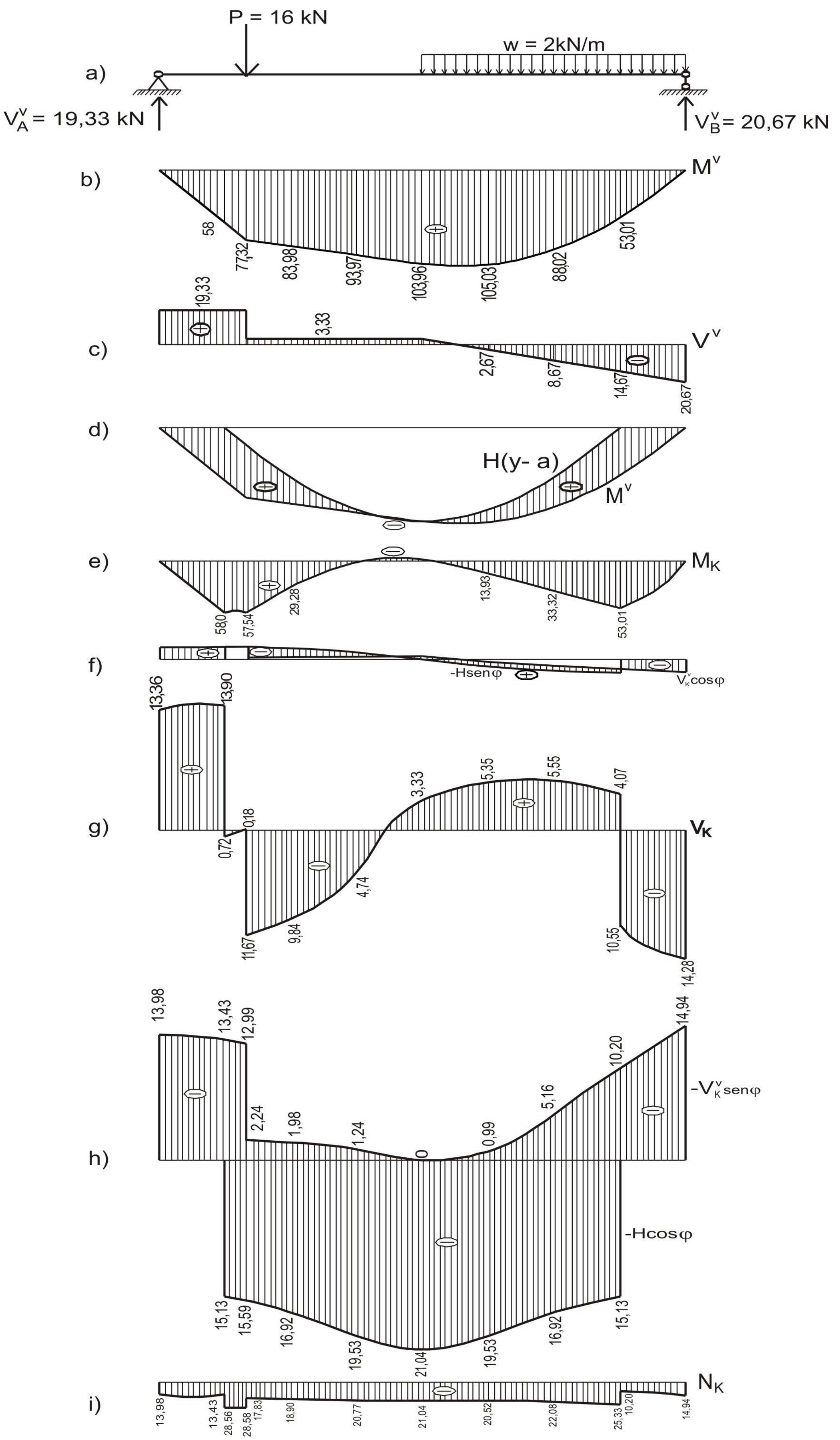

P = 16 kN
w = 2kN/m
a)
V$_A^v$ = 19,33 kN
V$_B^v$ = 20,67 kN
b)
M^v
58
77,32
83,98
93,97
103,96
105,03
88,02
53,01
c)
V^v
19,33
3,33
2,67
8,67
14,67
20,67
d)
H(y- a)
M^v
e)
M$_K$
58,0
57,54
29,28
13,93
33,32
53,01
f)
-Hsenφ
V$_K^v$cosφ
g)
V$_K$
13,36
13,90
0,18
0,72
11,67
9,84
4,74
3,33
5,35
5,55
4,07
10,55
14,28
h)
13,98
13,43
12,99
2,24
1,98
1,24
0
0,99
5,16
10,20
14,94
-V$_K^v$senφ
-Hcosφ
15,13
15,59
16,92
19,53
21,04
19,53
16,92
15,13
i)
N$_K$
13,98
13,43
28,56
28,58
17,83
18,90
20,77
21,04
20,52
22,08
25,33
10,20
14,94

Fig. 1.7

Todos los esquemas de cálculo y diagramas de fuerzas internas se muestran en la figura 1.7:

a) La viga correspondiente al arco triarticulado, con la misma luz y cargas.

b) Diagrama de momento flector en la viga.

c) Diagrama de fuerza cortante en la viga.

d) Diagramas M_K^v y $-H(y-a)$. El diagrama $-H(y-a)$ se inicia en la sección 2 y termina en la sección 9.

e) Diagrama de momento flector del arco, mostrado en el eje horizontal.

f) Diagramas $V_K^v \cos\varphi$ y $-H\text{sen}\varphi$.

g) Diagrama de fuerza cortante en el arco, mostrado también en el eje horizontal.

h) Diagramas $-V_K^v \text{sen}\varphi$ y $-H\cos\varphi$.

i) Diagrama de fuerza axial o normal en el arco.

En las zonas no cargadas o en las zonas con cargas uniformemente distribuidas, todos los diagramas en dichos tramos son curvos. En los lugares donde actúan las cargas puntuales, en los diagramas se tienen variaciones.

En las secciones donde actúan los momentos, en el diagrama M_K debe haber una variación igual al valor de dicho momento, y en la sección donde actúa una carga vertical puntual, el diagrama M_K varía en forma inclinada tangente a la curva del arco y los diagramas V_K y N_K tienen variaciones igual a $P\cos\varphi$ y $P\text{sen}\varphi$. En el punto donde actúe una carga puntual horizontal (en el presente problema en los nudos extremos del tirante), en el diagrama M_K existirá un pico y en los diagramas V_K y N_K se tendrán variaciones iguales a $H\text{sen}\varphi$ y $H\cos\varphi$ respectivamente.

Los esfuerzos normales se determinan por la conocida fórmula de resistencia compuesta:

$$\sigma_{\substack{máx\\min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{S} = \frac{N}{A} \pm \frac{6Ne}{bh^2} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6e}{h}\right) \qquad (1.10)$$

Donde:

e - excentricidad de la acción de la fuerza axial o normal.

$$e = \frac{M}{N} \qquad (1.11)$$

Determinamos el esfuerzo en la sección *2+0*, es decir cerca al apoyo *A*, pero superior al tirante y de acuerdo a los diagramas tenemos *M=58kN.m* y *N=-28,56kN*.

A través de fórmulas muy conocidas, determinamos las dimensiones de la sección transversal del arco en el intervalo:

$$h = \left(\frac{1}{30} \div \frac{1}{40}\right).L \qquad (1.12)$$

$$b = \frac{h}{2}$$

De donde:

$$h = \frac{2400}{40} = 60cm$$

$$b = 30cm$$

$$A = bh = 30.60 = 1800cm^2$$

$$e = \frac{58}{28,56} = 2,03m$$

En la figura 1.8 se muestra el núcleo de la sección y el punto de aplicación de la fuerza axial excéntrica. Los esfuerzos normales son:

$$\sigma_{máx} = -\frac{28560}{1800.10^{-4}}\left(1 + \frac{6.2,03}{0,60}\right) = -3380kPa$$

$$\sigma_{min} = -\frac{28560}{1800.10^{-4}}\left(1 - \frac{6.2,03}{0,60}\right) = 3062kPa$$

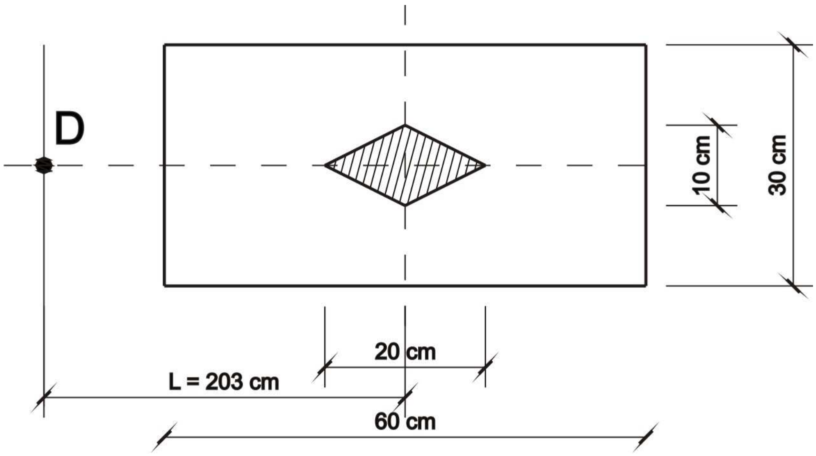


Fig. 1.8

En la figura 1.9 se muestra la distribución de esfuerzos normales en la sección transversal y la aplicación de la fuerza axial *N*.

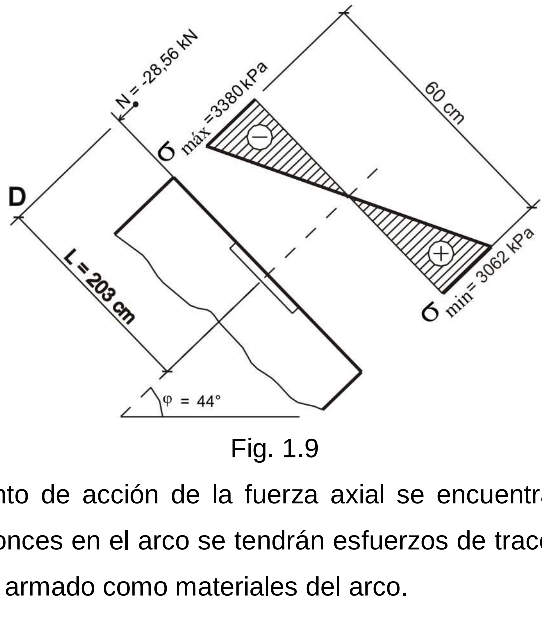


Fig. 1.9

Por cuanto el punto de acción de la fuerza axial se encuentra fuera del núcleo de la sección (figura 1.8), entonces en el arco se tendrán esfuerzos de tracción, recomendándose el uso de acero o concreto armado como materiales del arco.

1.3 CALCULO ANTE CARGAS MOVIBLES

1.3.1 LINEA DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES

Ubicamos una carga unitaria vertical $P = 1$ a una distancia x del apoyo izquierdo (figura 1.10, a) y efectuamos la sumatoria de momentos respecto a los apoyos:

$$\sum M_B = 0; \qquad V_A L - 1(L - x) = 0; \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{L - x}{L}$$

$$\sum M_A = 0; \qquad V_B L - 1.x = 0; \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{x}{L}$$

Las expresiones V_A y V_B concuerdan con las reacciones de una viga simplemente apoyada, en consecuencia, las líneas de influencia de V_A y V_B no se diferencian de las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de una viga simple, tal como se muestra en la figura 1.10, b, c.

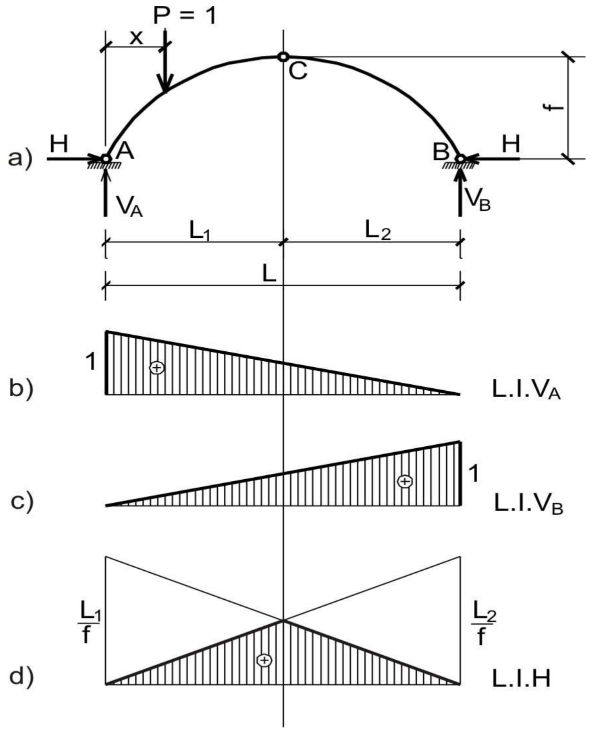


Fig.1.10

El empuje H se determina por la expresión:

$$H = \frac{M_C^v}{f} \tag{1.13}$$

Si la fuerza $P = 1$ se desplaza, entonces la fórmula 1.13 se transforma en:

$$L.I.H = \frac{1}{f} L.I.M_C^v \tag{1.14}$$

De esta manera, la línea de influencia del empuje H se forma como la multiplicación de las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección C de la viga correspondiente por la magnitud $\frac{1}{f}$. La línea de influencia se muestra en la figura 1.10, d.

1.3.2 LINEA DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS INTERNAS

a) LINEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR

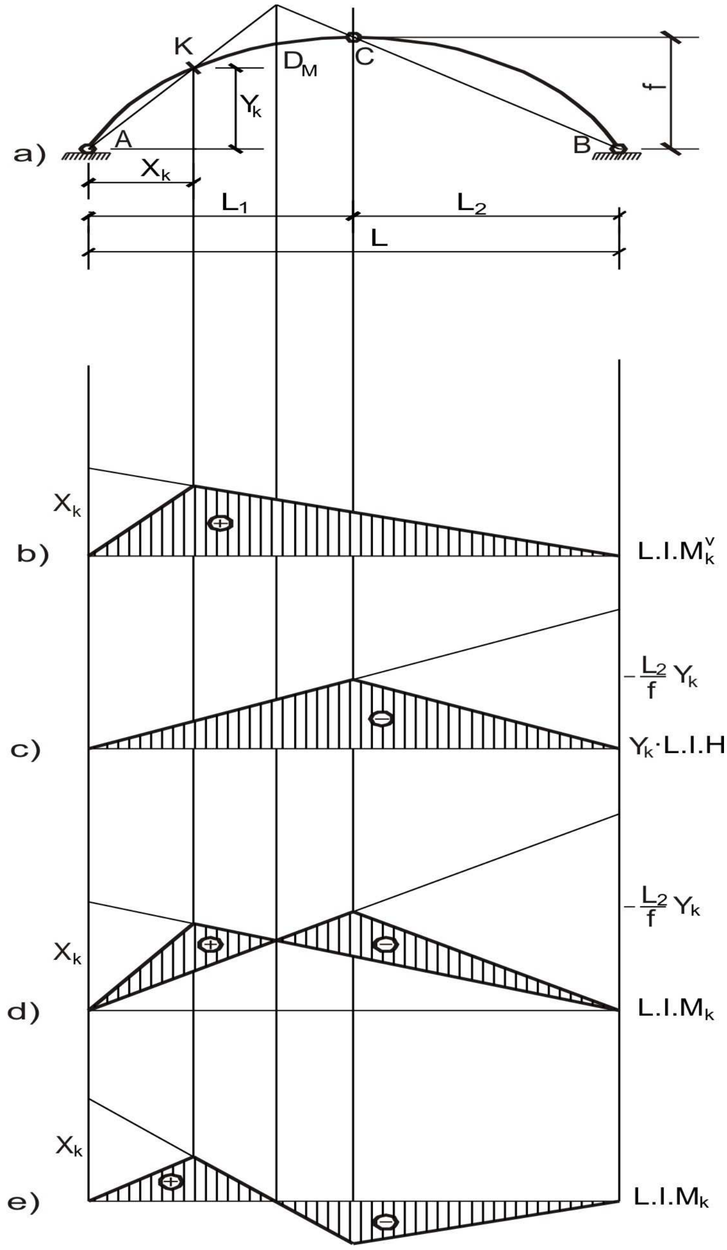


Fig. 1.11

El momento flector en la sección "K" se determina por la fórmula:

$$M_K = M_K^v - H.y_K$$

Si la fuerza $P = 1$ se desplaza, entonces:

$$L.I.M_K = L.I.M_K^v - y_K.L.I.H$$

De donde, la línea de influencia M_K es igual a la suma de dos líneas de influencia: línea de influencia del momento flector M_K^v en la sección "K" de la viga simple (figura 1.11, b) y la línea de influencia del empuje H, cuyas ordenadas se multiplican por $-y_K$

(figura 1.11, c). Sumando ambos gráficos obtenemos la línea de influencia M_K (figura 1.11, d, e).

El punto D_M se denomina *punto cero* de la línea de influencia M_K. Si la carga P se encontrara en el punto D_M, entonces el momento flector M_K en la sección "K" es igual a cero (debido a que la línea de acción de la reacción pasa por el punto K) (figura 1.11, a). La igualdad a cero de la línea de influencia del momento M_K en el punto D_M, viene a ser la comprobación de la veracidad de la obtención de la línea de influencia M_K. Tal comprobación es obligatoria y se llama *comprobación del punto cero*.

b) LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA CORTANTE

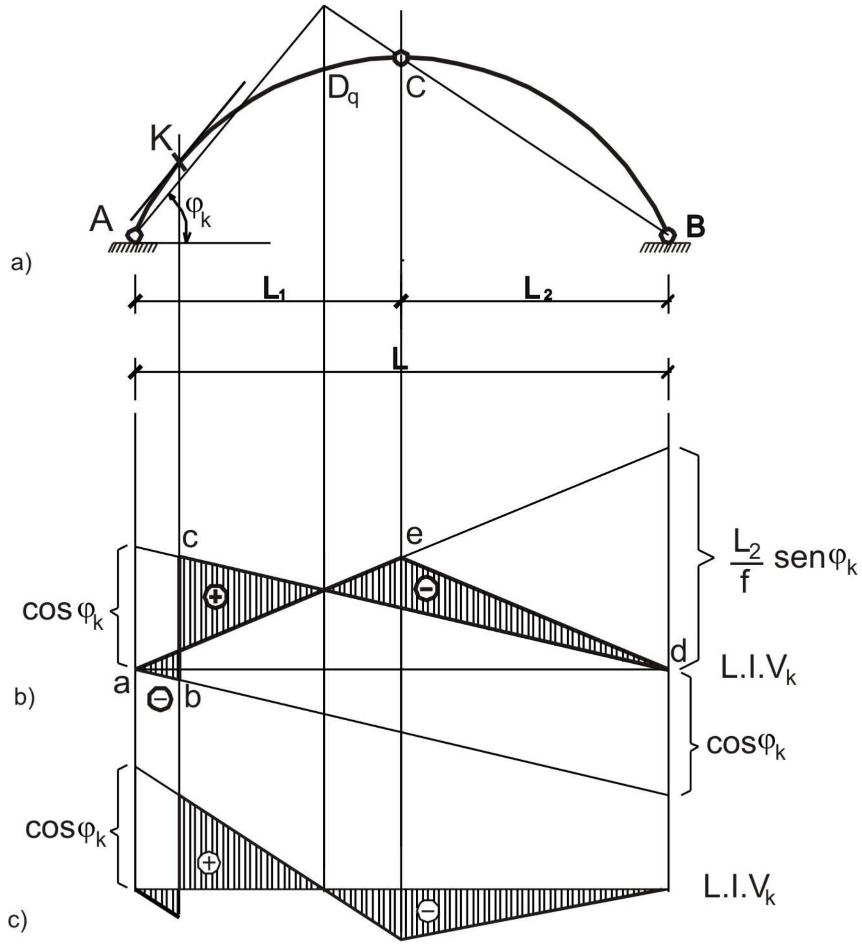


Fig. 1.12

Para graficar la línea de influencia de la fuerza cortante V_K en la sección "K", se utiliza la siguiente expresión:

$$V_K = V_K^v \cos\varphi_K - H\text{sen}\varphi_K$$

Si la fuerza $P = 1$ se desplaza, entonces se tendrá:

$$L.I.V_K = \cos\varphi_K .L.I.V_K^v - \text{sen}\varphi_K .L.I.H$$

De donde, la línea de influencia V_K es la suma de las dos líneas de influencia: línea de influencia V_K^v, cuyas ordenadas se multiplicarán por $\cos\varphi_K$ (figura 1.12, b, línea abcd) y la línea de influencia del empuje H, cuyas ordenadas se multiplican por $-\mathrm{sen}\varphi_K$ (figura 1.12, b, línea aed). En la figura 1.12, c se muestra la misma línea de influencia, pero cuyas ordenadas están ubicadas a partir del eje de la abcisa.

El punto D_q se llama *punto nulo* de la línea de influencia V_K. Si la fuerza P se encuentra en el punto D_q, entonces la fuerza cortante V_K será cero en el punto "K" (línea de acción de la reacción R_A paralela a la tangente al arco en la sección "K", en consecuencia, su proyección a la cortante del arco en la sección "K" será cero) (figura 1.12, a).

La igualdad a cero de esta ordenada es la comprobación de la correcta gráfica de la línea de influencia V_K. Tal comprobación es obligatoria y recibe el nombre de *comprobación del punto cero.*

c) LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA AXIAL O NORMAL

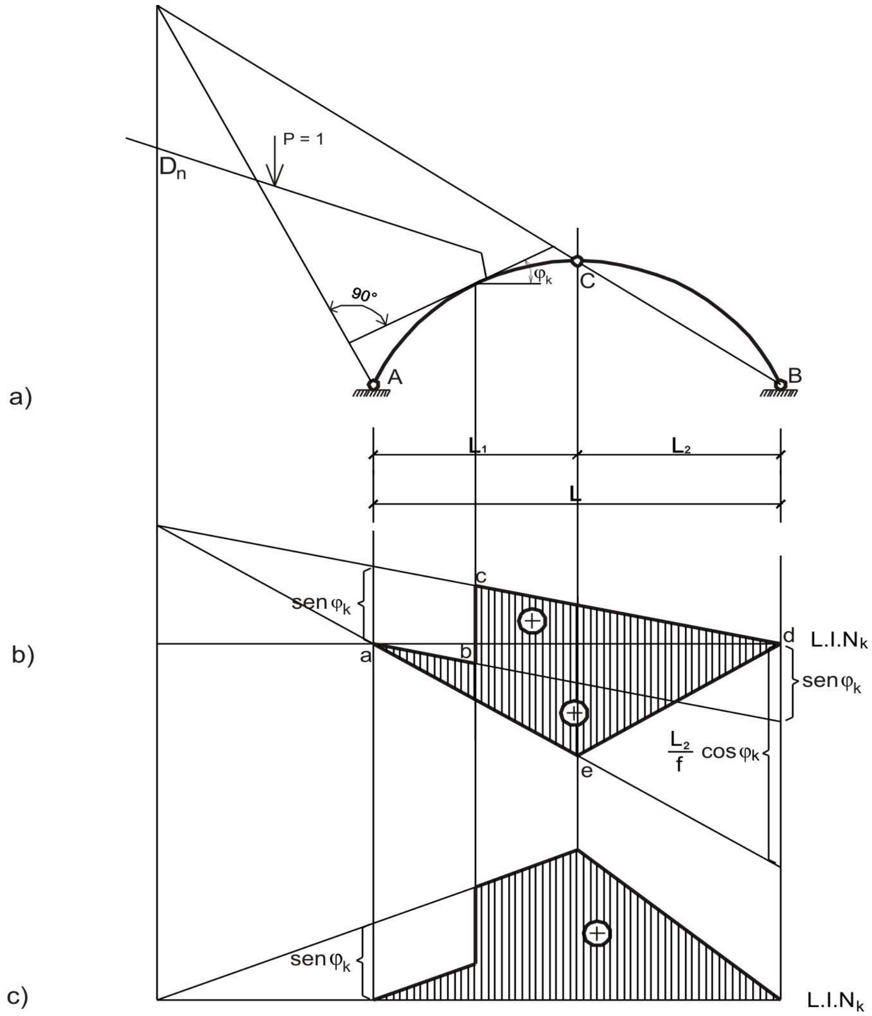


Fig. 1.13

Para graficar la línea de influencia de la fuerza axial o normal N_K en la sección "K" del arco, se utiliza la siguiente fórmula:

$$N_K = V_K^v sen\varphi_K + H\cos\varphi_K$$

Si la fuerza $P = 1$ se desplaza, entonces se tendrá:

$$L.I.N_K = sen\varphi_K .L.I.V_K^v + \cos\varphi_K .L.I.H$$

De donde, la línea de influencia N_K es igual a la suma de dos líneas de influencia: línea de influencia V_K^v, cuyas ordenadas se multiplicarán por $sen\varphi_K$ (figura 1.13, b, línea abcd) y línea de influencia del empuje H, cuyas ordenadas se multiplicarán por $\cos\varphi_K$ (figura 1.13, b, línea aed). En la figura 1.13, c se muestra dicha línea de influencia, pero donde sus ordenadas están a partir del eje de la abcisa.

El punto D_n se llama *punto cero* de la línea de influencia N_K. Tal punto nulo es ficticio, por cuanto la fuerza P se encuentra fuera del arco. La ordenada de la línea de influencia en dicho punto también es ficticia.

La igualdad a cero de dicha ordenada es la comprobación correcta de la línea de influencia N_K. Tal comprobación es obligatoria y se llama *comprobación del punto cero*.

CAPITULO 2
ARMADURAS ISOSTATICAS

Se denomina ARMADURA, al sistema, cuyo esquema de cálculo está compuesto por barras unidas entre sí por articulaciones o rótulas ideales. En la práctica constructiva, estas rótulas no se realizan y los nudos son rígidos (por ser más sencillo), pero la suposición de rótulas ideales en los nudos permite aminorar la dificultad del cálculo. Para ello, las cargas deben ser aplicadas en los nudos. En los esquemas de cálculo de las armaduras, las rótulas no se muestran, pero esto no implica que no existan.

La característica especial del estado esfuerzo-deformación de las armaduras, viene a estar dado por el trabajo de cada barra en tracción o compresión, por ello, su característica principal es la fuerza axial o normal, que originará alargamiento o acortamiento de la misma.

Antes del cálculo de la armadura, se recomienda realizar el análisis cinemático. Si la armadura es geométricamente estable y estáticamente determinada, entonces se podrá efectuar su cálculo, el cual consiste en la determinación de las fuerzas internas en todas las barras, debido a la acción de la carga muerta (peso propio) y cargas vivas. Todas las cargas se aplican en los nudos y consecuentemente son cargas puntuales.

2.1 ANALISIS CINEMATICO

El objetivo del análisis cinemático de la armadura, es la determinación del esquema de cálculo como sistema geométricamente estable.

Desde el punto de vista del análisis cinemático, el esquema de cálculo de la armadura es un sistema, cuyos elementos principales son los nudos, unidos entre sí por barras.

El grado de indeterminación de la armadura se determina por la fórmula:

$$G.I. = B - 2N \qquad (2.1)$$

Donde:

$G.I.$ - grado de indeterminación del sistema;

B - número de barras (incluido los apoyos);

N - número de nudos.

Para que la armadura sea geométricamente estable, será necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$G.I. \geq 0$ - para las armaduras unidas a tierra;

$G.I. \geq 3$ - para las armaduras no unidas a tierra.

Si la armadura no cumple con estas condiciones es geométricamente inestable. En ciertos casos, el cumplimiento de estas condiciones no es suficiente para indicar que el sistema es geométricamente estable. Para que el sistema sea estable, se debe de cumplir una condición adicional – la armadura debe estar correctamente formada.

La comprobación de la correcta formación de la armadura, se puede realizar aplicando los siguientes principios:

a) Cuando se analiza un sistema compuesto por discos, es importante considerar los apoyos de la estructura, llamándose “disco de la tierra”, al disco formado por los apoyos de dicha armadura.

Para ello, es necesario reemplazar el esquema de apoyo fijo y movible, por sus equivalentes de barras mostradas en la figura 2.1.

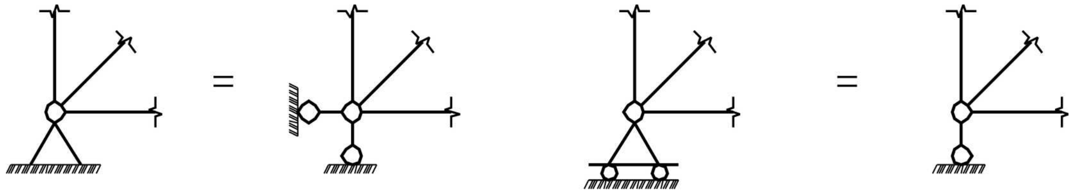


Fig. 2.1

b) Un sistema sencillo geométricamente estable, es aquel disco que se une por medio de un nudo con dos barras, que no se encuentran en una misma línea. De esta manera, se unen tres barras por medio de tres nudos formando un triángulo. Se entiende por disco simple, a una barra de la armadura analizada como elemento principal y no como conexión.

c) Dos discos unidos por tres barras, que no se intersecan en ningún punto, forman un sistema geométricamente estable.

d) Dos discos que se unen por una rótula y una barra, que no pasa por esta articulación, también forma un sistema geométricamente estable.

e) Tres discos unidos por tres rótulas, que no se encuentran en una misma línea, forman el denominado sistema geométricamente estable.

f) Dos barras que unen a dos discos, es equivalente a una rótula ficticia, que se encuentra en la intersección de los ejes de las barras.

Los principios indicados, nos permiten analizar cualquier tipo de armadura, por más compleja que sea, pudiendo realizarse por etapas y aplicando simultáneamente cualquier principio.

Los sistemas geométricamente estables se dividen en estáticamente determinados o isostáticos y estáticamente indeterminados o hiperestáticos. Si el sistema es geométricamente estable y $G.I. = 0$, cuando está unido a la tierra o $G.I. = 3$ para el sistema no unido a la tierra, entonces la armadura será isostática.

A continuación, analizamos algunos ejemplos del análisis cinemático:

EJEMPLO 1. Comprobar que la armadura mostrada en la figura 2.2 es geométricamente estable.

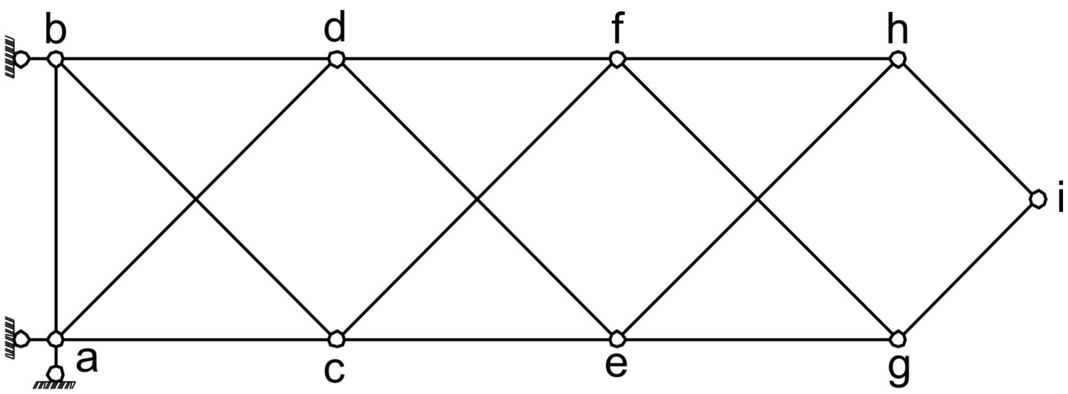


Fig. 2.2

Como el número de barras es $B = 18$ y nudos $N = 9$, se tendrá que el número de grados de indeterminación es:

$$G.I. = 18 - 2.9 = 0$$

Ahora comprobamos la correcta formación de la armadura, para que sea geométricamente estable. Aplicamos el principio b), debido a que la barra *ab* está unida con el nudo C por medio de dos barras, que no se encuentran en una misma línea. En forma análoga se unirán con los nudos *d, e, f, g, h, i.* Finalmente, aplicamos el principio c) para unir este disco con el de la tierra, a través de tres barras, que no se intersecan en ningún punto, demostrándose la correcta formación de la armadura, la cual es geométricamente estable y estáticamente determinada.

EJEMPLO 2. Comprobar que la armadura de la figura 2.3 es geométricamente estable e isostática.

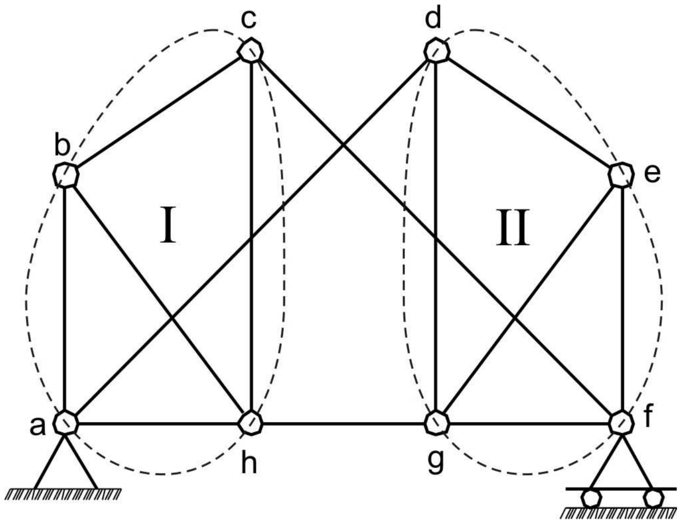


Fig. 2.3

El número de grados de indeterminación es:

$$G.I. = 16 - 2.8 = 0$$

Ahora comprobamos la correcta formación de la armadura, para ello, aplicamos el principio b), formando las armaduras-discos I (nudos *a, b, c, h*) y II (nudos *d, e, f, g*). En la figura 2.3 se muestran a los discos en forma punteada. Los dos discos (I y II) están unidos por tres barras *ad, cf, gh*, los cuales no se intersecan en ningún punto, cumpliéndose con el principio c). A su vez, este disco se une con el de la tierra por otras tres barras que tampoco se intersecan en ningún punto, haciendo de la armadura un sistema correctamente formado, geométricamente estable e isostático.

EJEMPLO 3. Realizar el análisis cinemático de la armadura mostrada en la figura 2.4.

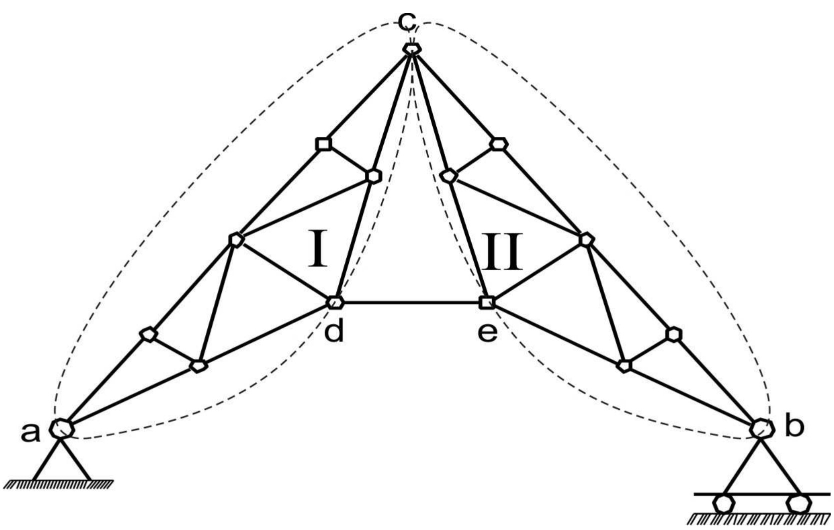


Fig. 2.4

Calculamos el número de grados de indeterminación:

$$G.I. = 30 - 2.15 = 0$$

Aplicando el principio e), se forman los discos I y II, los cuales están unidos entre sí por una rótula C y una barra *de*, la cual no pasa por dicha rótula, aplicándose el principio d). El disco obtenido está unido con el disco de la tierra por tres barras, que no se intersecan en un mismo punto, siendo la armadura estáticamente determinada y geométricamente estable.

EJEMPLO 4. Efectuar el análisis cinemático de la armadura mostrada en la figura 2.5.

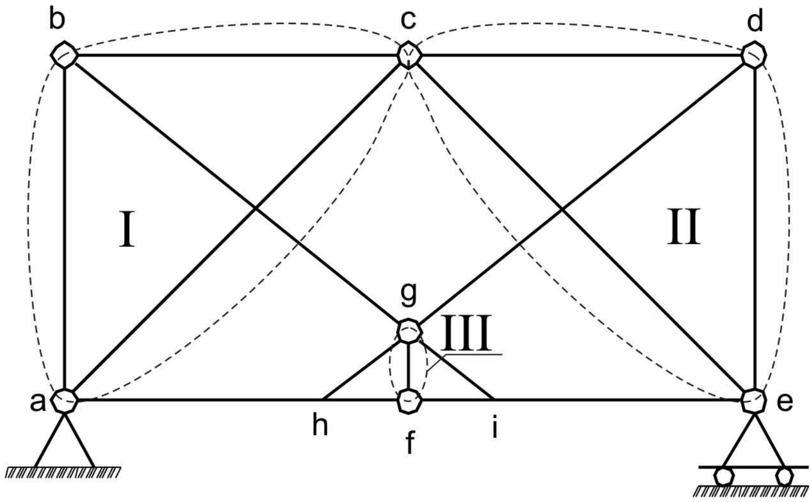


Fig. 2.5

Calculamos el número de grados de indeterminación:

$$G.I. = 14 - 2.7 = 0$$

Los triángulos geométricamente invariables *abc, cde* y la barra *fg* se analizarán como discos I, II y III. La unión de dichos discos se realiza de la siguiente manera: los discos I y II se unen por medio de la rótula C; los discos II y III se unen por dos barras que forman la rótula ficticia *h*, que se encuentra en la intersección de las líneas de las barras *dg* y *ef* (principio f); los discos I y III se unen análogamente por la rótula ficticia *i*. En consecuencia, los tres discos se unen por tres rótulas (*c, h, i*), que no se encuentran en una misma línea, formando un disco geométricamente estable, el cual a su vez se une con el disco de la tierra, por medio de tres barras, que no se intersecan en un mismo punto, haciendo que la armadura sea geométricamente estable y estáticamente determinada.

2.2 DETERMINACION DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS

Antes de determinar las fuerzas internas en las armaduras, se debe inicialmente calcular las reacciones en los apoyos, los cuales se pueden obtener de dos formas: analíticamente y gráficamente.

Cuando se calculan las reacciones en forma analítica, se pueden aplicar una de las tres siguientes fórmulas:

$$\sum F_X = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \qquad (2.2)$$
$$\sum M_A = 0$$

Si el eje OX no es perpendicular a la línea AB, se puede aplicar la fórmula 2.3:

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad (2.3)$$

$$\sum F_X = 0$$

Cuando los puntos A, B, C no se encuentran en una misma línea, se puede aplicar la siguiente fórmula:

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad (2.4)$$

$$\sum M_C = 0$$

Otra de las formas, es el método gráfico de Maxwell-Cremona, el cual tiene sus inconvenientes, por ser inexacto en un ±5%, lo cual en la actualidad no es adecuado, ni ventajoso, más aun teniendo en cuenta el uso de la informática.

Para calcular las reacciones, se deben de tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

a) Para armaduras tipo voladizo, no es necesario determinar sus reacciones. En este caso, las fuerzas internas se pueden calcular analizando la parte del volado de la armadura.
b) En el caso de armaduras simplemente apoyadas (un apoyo fijo y otro movible), las reacciones se pueden determinar por las fórmulas 2.2 o 2.3.
c) En las armaduras complejas (figura 2.4), primero se calculan las reacciones en los apoyos y luego se analiza la parte izquierda o derecha de la rótula C, determinándose la fuerza interna en la barra *de*.

$$\sum M_C^{izq.C} = 0 \qquad (2.5)$$

$$\sum M_C^{der.C} = 0$$

d) En el caso de armaduras triarticuladas con apoyos fijos, surge reacción horizontal (empuje), hasta en casos de acción de solo fuerzas verticales. En este tipo de armaduras se calculan sus reacciones a través de la fórmula 2.3 y, finalmente, para el corte en el nudo C elegido (derecha o izquierda) se aplicará la fórmula 2.5.

2.3 BARRAS NULAS

Las barras, cuyas fuerzas internas son ceros, se denominan BARRAS NULAS. Esto no implica que dichas barras no sean necesarias en el esquema de la armadura. De un lado, si se cambian las cargas, dichas barras nulas pueden empezar a trabajar y, de otro lado, las barras nulas son necesarias para conectar los cordones superior e inferior de la armadura, disminuyendo de esta manera su longitud de cálculo y, con ello, disminuye su flexibilidad, que es un punto importante para la elección de las secciones.

El proceso de aparición de las barras nulas se recomienda realizarlo después de determinar las reacciones y habiendo efectuado las comprobaciones del caso. Como es conocido, la aparición de las barras nulas nos permite hacer más sencillo el cálculo de la armadura.

Para determinar las barras nulas, es necesario que se cumplan los siguientes principios:

a) Si dos barras que se unen en un nudo no cargado y tampoco se encuentran en una misma línea, entonces ambas barras son nulas (figura 2.6, a).
b) Si tres barras se unen en un nudo no cargado de una armadura, estando dos de ellos en una misma línea y la tercera forma un cierto ángulo con esta línea; entonces esta última barra es nula (figura 2.6, b).
c) Si dos barras se unen en un nudo cargado, cuya fuerza actúa a lo largo de una barra, entonces la otra barra será nula (figura 2.6, c).

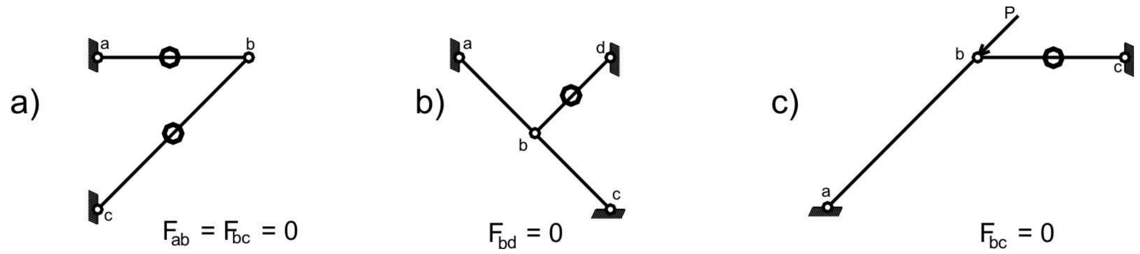


Fig. 2.6

2.4 DETERMINACION DE FUERZAS INTERNAS EN LAS BARRAS DE LA ARMADURA

Para determinar las fuerzas internas en las barras de la armadura en forma analítica, fundamentalmente se utilizan dos métodos:

a) Método de los nudos
b) Método de las secciones

METODO DE LOS NUDOS

Se hace un corte en el nudo donde se unen dos barras como incógnitas y se encuentran las fuerzas internas a través de las ecuaciones de equilibrio 2.6:

$$\sum F_X = 0 \qquad (2.6)$$

$$\sum F_Y = 0$$

Luego, se continúa con otro nudo, donde también hay dos incógnitas y así sucesivamente, encontrando todas las fuerzas internas en las barras de la armadura.

Por ejemplo, para la armadura de la figura 2.2, la secuencia de análisis de los nudos es *i, h, g, f, e, d, c, b, a.* En cada caso, los valores determinados nos servirán para continuar con el siguiente nudo y así consecutivamente hasta concluir con el cálculo.

METODO DE LAS SECCIONES

Se efectúa haciendo un corte en la sección de la armadura, dividiendo a la estructura en dos partes, cada una de las cuales se encuentra en equilibrio, pudiendo aplicar las fórmulas 2.3 o 2.4. Si en la sección de corte están 3 barras, entonces se pueden aplicar las ecuaciones comunes de equilibrio estático.

El caso de la fórmula 2.4 es cuando las líneas de acción de dos barras se encuentran en un punto indicado y es entonces que la sumatoria de momentos se hace respecto a este punto para determinar la fuerza interna de la tercera barra. En el caso que la línea de intersección de dos barras sea el infinito, entonces se aplicará la sumatoria de proyecciones en el eje perpendicular a dichas barras, determinando el valor de la fuerza interna de la tercera barra.

En muchos casos, se puede aplicar en forma alterna los métodos de los nudos y las secciones.

A continuación, analizamos dos ejemplos de determinación de fuerzas internas:

EJEMPLO 5. Determinar en forma analítica las fuerzas internas en las barras *fh, gh, gi* de la armadura triarticulada mostrada en la figura 2.7, a.

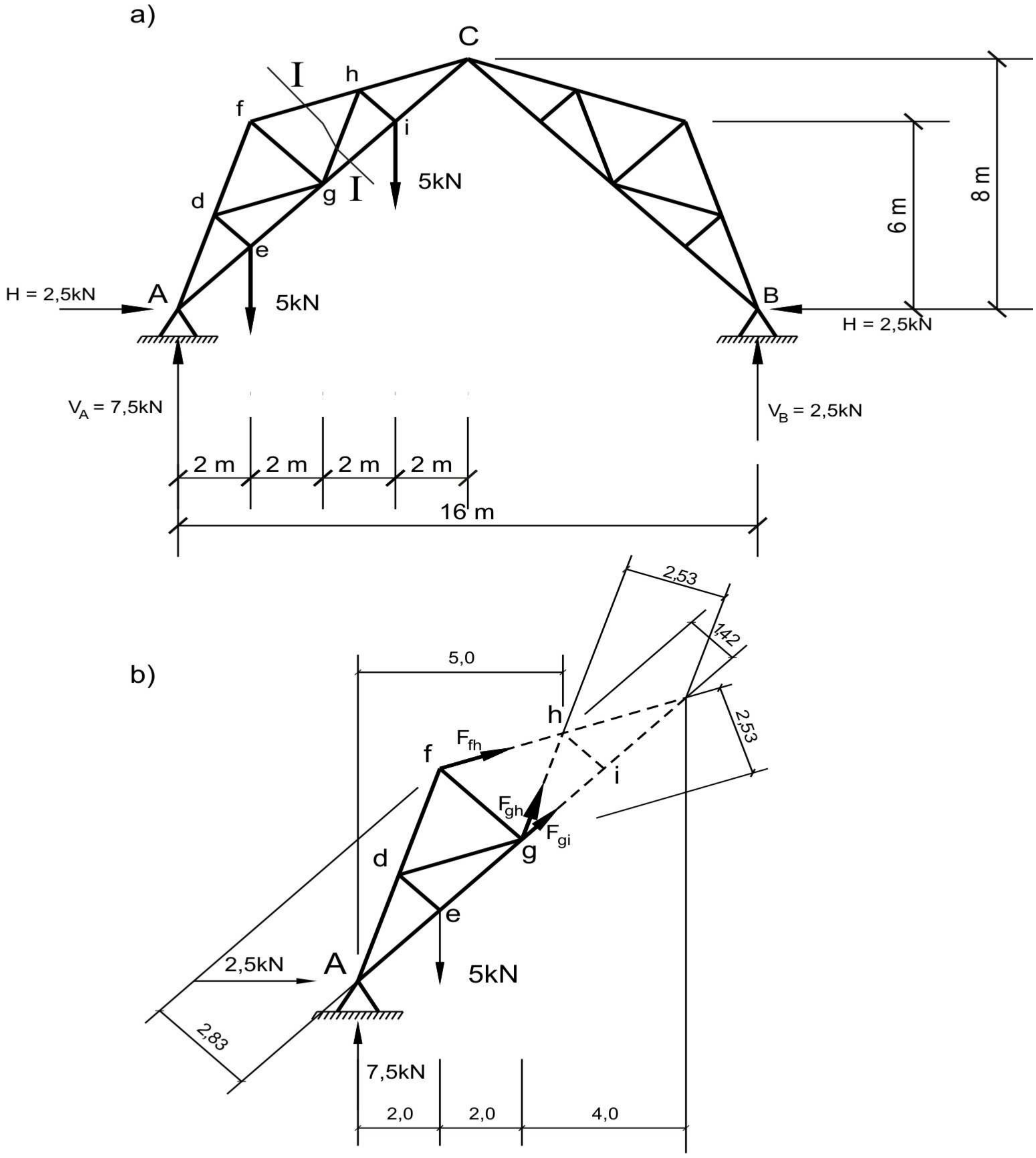


Fig. 2.7

Calculamos las reacciones a partir del sistema de ecuaciones:

$$\sum M_A = 0; \qquad V_B.16 - 5.2 - 5.6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 2{,}5kN \uparrow$$

$$\sum M_C^{der} = 0; \qquad 2{,}5.8 - H_B.8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_B = 2{,}5kN \leftarrow$$

$$\sum F_X = 0 \ ; \qquad H_A - 2{,}5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 2{,}5kN \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad V_A + 2{,}5 - 5 - 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = 7{,}5kN \uparrow$$

Para determinar las fuerzas internas en las barras marcadas, cortamos la armadura en la sección $I - I$ y analizamos la parte izquierda de la misma (figura 2.7, b), considerando que las fuerzas internas son de tracción.

Ahora calculamos la fuerza F_{gi} a través de la ecuación de momentos respecto al punto *h*, que concuerda con el centro del nudo:

$$\sum M_h^{izq} = 0; \qquad 7{,}5.5 - 2{,}5.7 - 5.3 - F_{gi}.1{,}42 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{gi} = 3{,}52kN$$

Ahora analizamos las ecuaciones de los momentos respecto a la rótula en C, determinando la fuerza F_{gh}:

$$\sum M_C^{izq} = 0; \qquad 7{,}5.8 - 2{,}5.8 - 5.6 + F_{gh}.2{,}53 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{gh} = -3{,}95kN$$

Para determinar la fuerza F_{fh} realizamos la sumatoria de momentos respecto al punto *g*:

$$\sum M_g^{izq} = 0; \qquad 7{,}5.4 - 2{,}5.4 - 5.2 + F_{fh}.2{,}53 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{fh} = 3{,}95kN$$

EJEMPLO 6. Efectuar el análisis cinemático y describa el proceso de la determinación analítica de las fuerzas internas de la armadura mostrada en la figura 2.8, a.

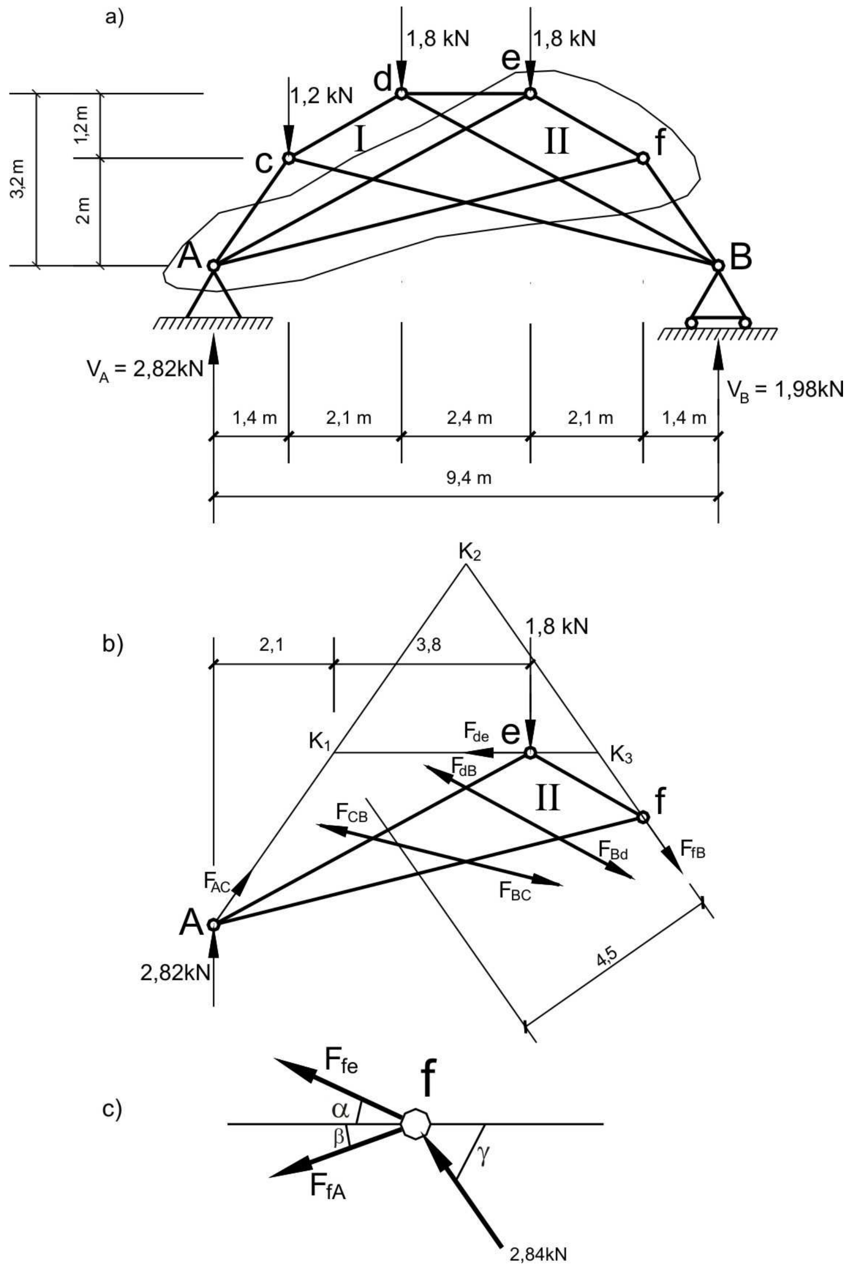


Fig. 2.8

Determinamos el grado de indeterminación del sistema:

$$G.I. = 12 - 2.6 = 0$$

La armadura ha sido formada por discos triangulares rígidos *Bcd* (I) y *Aef* (II). Los discos I y II se unen por medio de tres barras *Ac, de, fB,* que no son paralelas, ni se intersecan en ningún punto. A estas barras los llamaremos de unión. Consecuentemente, la armadura se une con la tierra por dos conexiones en el apoyo *A* y una conexión en el apoyo *B*.

De esta manera, la armadura fue formada correctamente, es estáticamente determinada y geométricamente estable.

Ahora determinamos las reacciones en los apoyos:

$\sum F_X = 0;\qquad H_A = 0$

$\sum M_A = 0;\qquad V_B.9,4 - 1,2.1,4 - 1,8.3,5 - 1,8.5,9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 1,98kN \uparrow$

$\sum F_Y = 0;\qquad V_A + 1,98 - 1,2 - 2.1,8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = 2,82kN \uparrow$

Posteriormente, determinamos las fuerzas internas en las barras de unión, para ello hacemos un corte en el disco II (figura 2.8, b), cortando las barras *Ac, de, fB.* Las barras *Bc* y *Bd* también se cortan, pero dos veces, siendo equivalentes por la condición de equilibrio, es decir:

$$F_{BC} = F_{CB}$$

$$F_{BD} = F_{DB}$$

Esto quiere decir, que en cualquier ecuación, las fuerzas F_{BC} y F_{CB}, F_{BD} y F_{DB} mutuamente se eliminan, porque actúan en una misma línea.

La parte de la armadura analizada será solamente calculada para determinar las tres fuerzas internas desconocidas F_{AC}, F_{DE}, F_{FB}.

De la siguiente ecuación se obtiene:

$\sum M_{k_1}^{II} = 0;\qquad F_{FB}.4,5 + 1,8.3,8 + 2,82.2,1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{FB} = -2,84kN$

Análogamente, de las ecuaciones $\sum M_{k_2}^{II} = 0$ y $\sum M_{k_3}^{II} = 0$ se pueden determinar las fuerzas internas F_{DE} y F_{AC}.

Ahora analizamos el nudo *f*, conociendo que la fuerza F_{FB} es conocida y está orientada hacia el nudo (signo "menos") (figura 2.8, c), obtenemos las ecuaciones:

$\sum F_X = 0;\qquad -F_{FE}.\cos\alpha - F_{FA}.\cos\beta - 2,84\cos\gamma = 0$

$\sum F_Y = 0;\qquad F_{FE}.\text{sen}\alpha - F_{FA}.\text{sen}\beta + 2,84\text{sen}\gamma = 0$

Siendo:

$\text{sen}\alpha = 0,496;\qquad \cos\alpha = 0,868$

$\text{sen}\beta = 0,243;\qquad \cos\beta = 0,970$

$\text{sen}\gamma = 0,819;\qquad \cos\gamma = 0,573$

De donde se obtiene:

$$F_{FE} = -3{,}83kN$$

$$F_{FA} = 1{,}75kN$$

Análogamente, se pueden determinar las fuerzas en el resto de barras.

2.5 CALCULO ANALITICO DE ARMADURA ISOSTATICA

La armadura mostrada en la figura 2.9 tiene una longitud $L = 24m$; con una luz entre armaduras (en el plano) de $b = 6m$; altura de la edificación $H = 18m$; longitud de la edificación $B = 36m$; factor de sobrecarga para la carga muerta $n = 1{,}1$; $p_a = 0{,}20kN/m^2$ (peso de la armadura); $p_c = 1{,}6kN/m^2$ (peso de la cubierta); $p_1 = 0$ (peso del larguero); factor de sobrecarga para la carga de nieve $n_1 = 1{,}4$; $p_0 = 1{,}0kN/m^2$ (peso normativo de la nieve); factor de sobrecarga para la carga de viento $n_2 = 1{,}2$; presión del viento $q_0 = 0{,}34kN/m^2$.

Se pide:

1) Calcular la armadura ante la carga muerta (peso propio), de nieve y de viento.
2) Determinar las fuerzas internas en las tres barras marcadas en la figura 2.9.
3) Comprobar las fuerzas internas en estas tres barras a través de las líneas de influencia "nieve en la parte izquierda de la armadura".

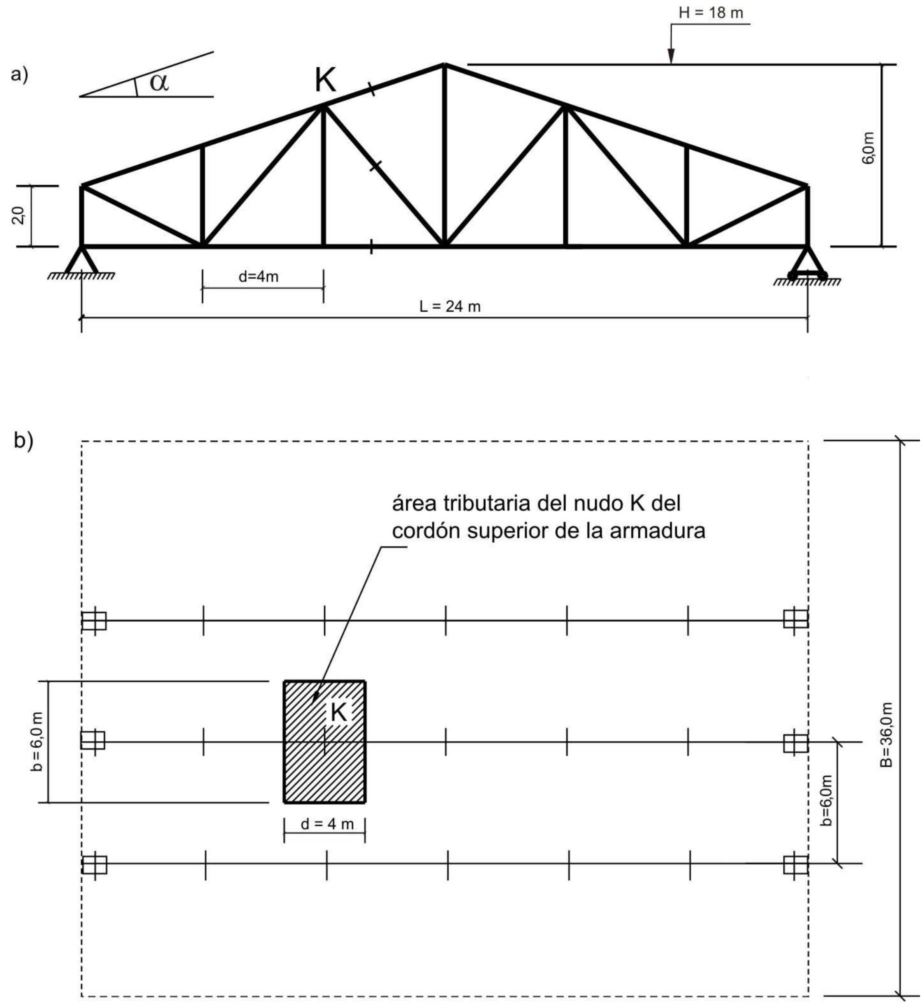


Fig. 2.9

ANALISIS CINEMATICO DE LA ARMADURA

a) Condición necesaria:

$$G.I. = 28 - 2.14 = 0$$

b) Condición adicional:

La armadura ha sido formada por triángulos, los cuales forman un disco que se une a la tierra por medio de tres barras (dos en el apoyo fijo y uno en el apoyo movible) que no se intersecan en ningún punto, haciendo que el sistema sea correctamente formado, sencillo, estáticamente determinado y geométricamente estable.

CALCULO DE LA ARMADURA ANTE LA CARGA MUERTA (PESO PROPIO)

a) Determinamos las cargas puntuales:

$$P_{p.p.} = n\left(p_a bd + p_c b\frac{d}{\cos\alpha} + p_l b\right) \qquad (2.7)$$

Como en la armadura:

$$tg\alpha = \frac{6-2}{12} = 0{,}333 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 18{,}418^0 = 18^0 25'$$

Consecuentemente:

$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}316$; $\qquad \cos\alpha = 0{,}949$

De ello, se desprende que la carga puntual del peso propio se puede calcular por la siguiente fórmula aproximada:

$$P_{p.p.} = nqbd \qquad (2.8)$$

Donde:

$q = p_a + p_c + \frac{p_l}{d} = 1{,}8 kN/m^2$ - sumatoria de la carga normativa constante en $1m^2$ de área tributaria de la edificación;

$bd = 6.4 = 24m^2$ - área tributaria del nudo del cordón superior de la armadura.

$$P_{p.p.} = 1{,}1.1{,}8.24 = 47{,}52kN \approx 48kN$$

El esquema de aplicación de las cargas se muestra en la figura 2.10.

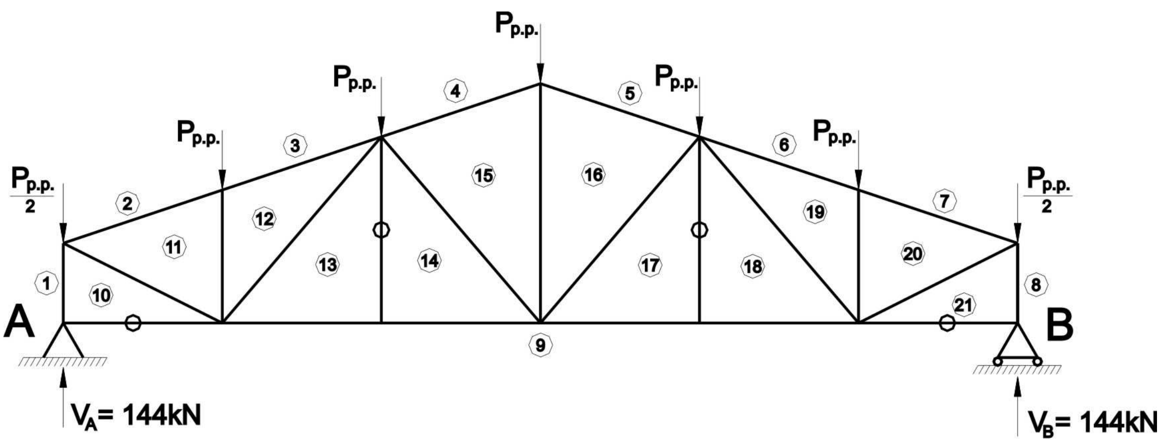


Fig. 2.10

b) Determinamos las reacciones en los apoyos:

$$V_A = V_B = \frac{6.48}{2} = 144kN \uparrow$$

c) Calculamos analíticamente las fuerzas internas en las tres barras marcadas de la armadura (figura 2.11).

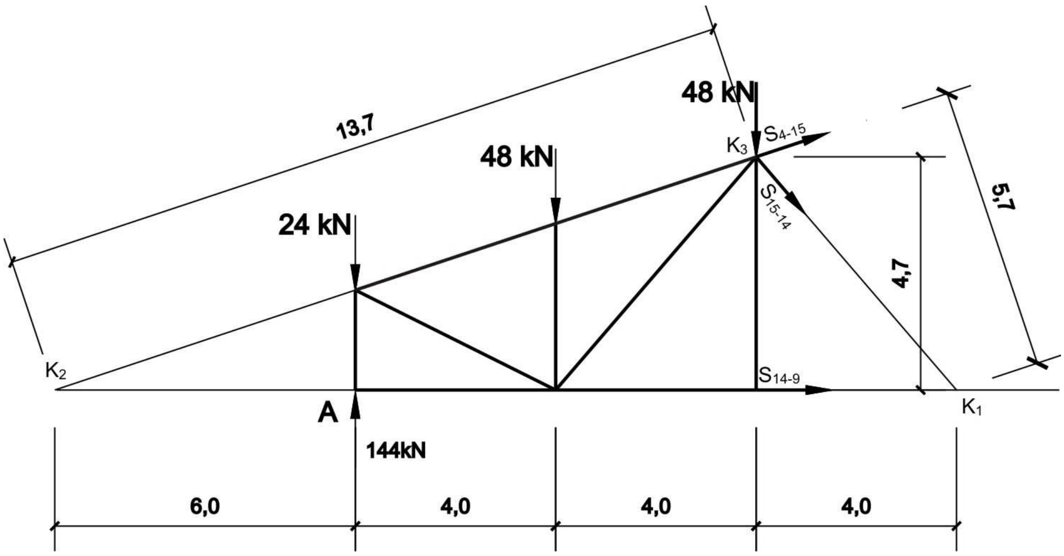


Fig. 2.11

$\sum M_{K_1} = 0$; $$S_{4-15}.5,7 + 144.12 - 24.12 - 48.8 - 48.4 = 0$$

$$S_{4-15} = -151,6kN$$

$\sum M_{K_2} = 0$; $$S_{15-14}.13,7 + 48.14 + 48.10 + 24.6 - 144.6 = 0$$

$$S_{15-14} = -31,5kN$$

$\sum M_{K_3} = 0$; $$-S_{14-9}.4,7 - 48.4 - 24.8 + 144.8 = 0$$

$$S_{14-9} = 163,4kN$$

CALCULO DE LA ARMADURA ANTE LA CARGA VIVA – “NIEVE EN LA PARTE IZQUIERDA DE LA ARMADURA”

a) Determinamos las cargas puntuales:

$$P_n = n_1 p_0 cbd \quad (2.9)$$

Donde:

c - coeficiente dependiente del ángulo de inclinación de la cubierta, que caracteriza el grado de retención de la nieve en la cubierta.

Para cubiertas a dos aguas el coeficiente c se determina por la relación:

Cuando $\alpha \leq 25^0 \quad \Rightarrow \quad c = 1,0$

Cuando $\alpha \geq 60^0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

Para valores intermedios de c $(25^0 < \alpha < 60^0)$ se permite calcularlo por medio de interpolación lineal.

En nuestro caso $c = 1,0$.

$$P_n = 1{,}4.1.1.6.4 = 33{,}6kN \approx 34kN$$

El esquema de aplicación de las cargas “nieve en la parte izquierda de la armadura” se muestra en la figura 2.12.

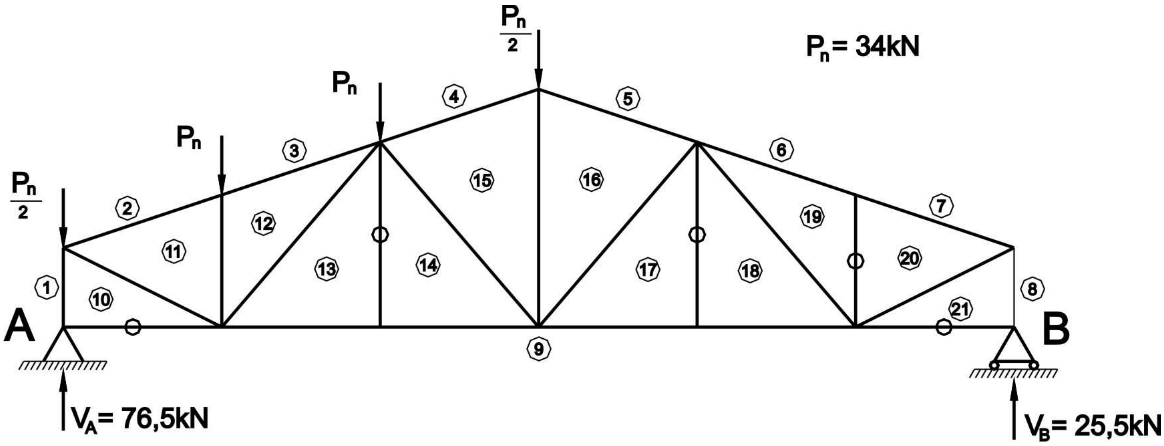


Fig. 2.12

b) Determinamos las reacciones en los apoyos:

$\sum M_A = 0;$ $\quad V_B.24 - 34.4 - 34.8 - 17.12 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 25{,}5kN \uparrow$

$\sum F_Y = 0;$ $\quad V_A + 25{,}5 - 17 - 34 - 34 - 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 76{,}5kN \uparrow$

c) Calculamos analíticamente las fuerzas internas en las tres barras marcadas de la armadura (figura 2.13).

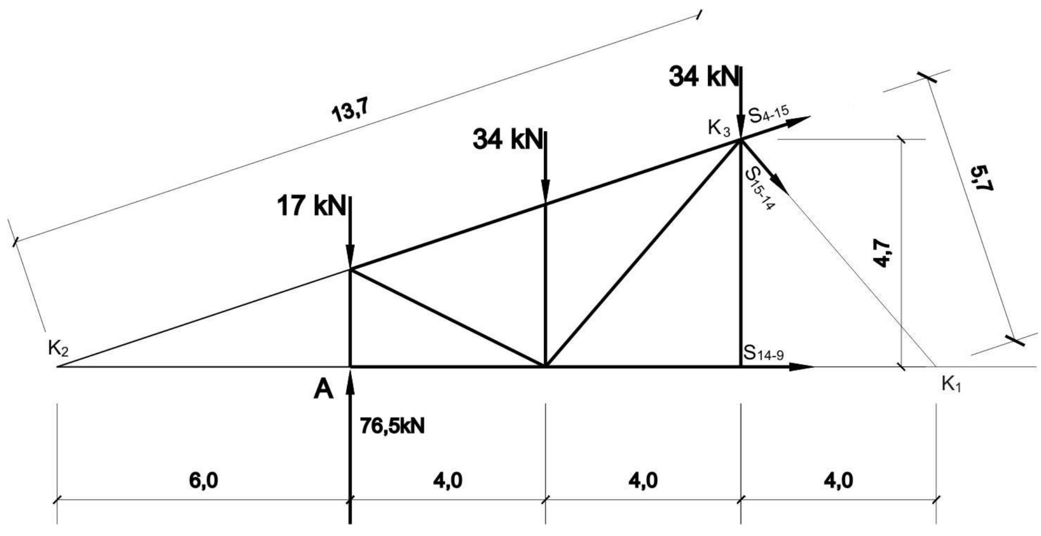


Fig. 2.13

$\sum M_{K_1} = 0;$ $\quad S_{4-15}.5{,}7 + 76{,}5.12 - 34.4 - 34.8 - 17.12 = 0$

$$S_{4-15} = -53{,}7kN$$

$\sum M_{K_2} = 0;$ $\quad S_{15-14}.13{,}7 + 34.14 + 34.10 + 17.6 - 76{,}5.6 = 0$

$$S_{15-14} = -33{,}5kN$$

$\sum M_{K_3} = 0;$ $\quad -S_{14-9}.4{,}7 - 34.4 - 17.8 + 76{,}5.8 = 0$

$$S_{14-9} = 72{,}3kN$$

Según las normas internacionales se tendrán que hacer tres cálculos: "nieve en la parte izquierda de la armadura", "nieve en la parte derecha de la armadura" y "nieve en toda la armadura". Como en este caso la carga de nieve es vertical y simétrica, se puede hacer sólo el cálculo "nieve en la parte izquierda de la armadura". Cuando se cambie la carga a la parte derecha, las reacciones y fuerzas internas cambiarán simétricamente al otro lado de la armadura. Aplicando el principio de superposición, las fuerzas internas debido a las cargas "nieve en toda la armadura" será igual a la suma de las fuerzas internas de "nieve en la parte izquierda de la armadura" y "nieve en la parte derecha de la armadura".

CALCULO DE LA ARMADURA ANTE LA CARGA VIVA – "VIENTO EN LA PARTE IZQUIERDA DE LA ARMADURA"

a) Determinamos los coeficientes aerodinámicos:

Los coeficientes aerodinámicos caracterizan el grado y la dirección de la acción del viento sobre la superficie. Este coeficiente depende de la orientación de la superficie en relación con la acción del viento, relación entre las dimensiones de la edificación, forma de la estructura. El signo "+" indica que el viento golpea a la estructura y el signo "-" que el viento se despega de la superficie de contacto.

Para edificaciones con lados verticales, el factor de forma para el lado de barlovento es de 0,8. Como en nuestro caso el viento actúa en la parte izquierda de la armadura, tenemos:

$$c_0 = +0{,}8$$

Ahora analizamos el caso del problema de determinación de los coeficientes aerodinámicos (tablas 2.1 y 2.2) para una cubierta a dos aguas (figura 2.14):

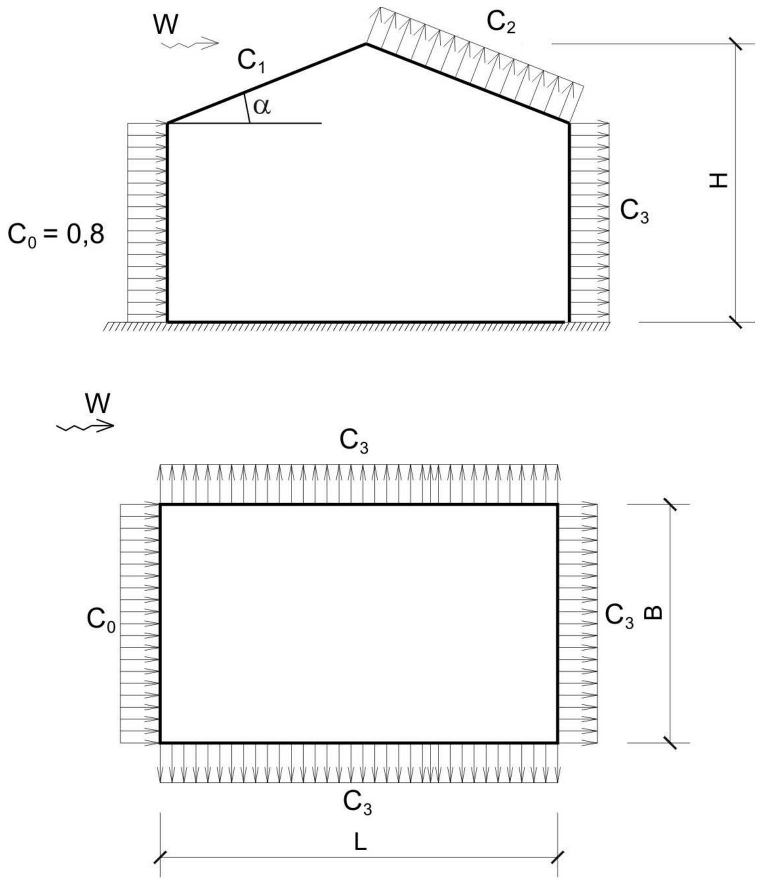


Fig. 2.14

Tabla 2.1

Coeficiente	α	H/L			
		0	**0,5**	**1**	**2**
c_1	0^0	0	-0,6	-0,7	-0,8
	20^0	+0,2	-0,4	-0,7	-0,8
	40^0	+0,4	+0,3	-0,2	-0,4
	60^0	+0,8	+0,8	+0,8	+0,8
c_2		-0,4	-0,4	-0,5	-0,8

Tabla 2.2

Coeficiente	B/L	H/L		
		0,5	**1**	$\geq$**2**
c_3	≤ 1	-0,4	-0,5	-0,6
	≥ 2	-0,5	-0,6	-0,6

El factor de forma para la parte izquierda de la cubierta a dos aguas será:

Cuando $\alpha = 0^0$, $\frac{H}{L} = \frac{18}{24} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -0{,}65$

Cuando $\alpha = 20^0$, $\frac{H}{L} = \frac{18}{24} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -0{,}55$

Por interpolación lineal, determinamos el valor de c_1 para el ángulo $\alpha = 18{,}418^0$

$$c_1 = -0{,}55 - (0{,}65 - 0{,}55)\frac{20 - 18{,}418}{20} = -0{,}56$$

El factor de forma para la parte derecha de la cubierta a dos aguas será:

Cuando $\frac{H}{L} = 0{,}75$, $c_2 = -0{,}45$

El factor de forma para el lado de sotavento será:

Cuando $\frac{B}{L} = 1$, $\frac{H}{L} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -0{,}45$

Cuando $\frac{B}{L} = 2$, $\frac{H}{L} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -0{,}55$

En nuestro caso, $\frac{B}{L} = \frac{36}{24} = 1{,}50$, el coeficiente $c_3 = -0{,}50$ y se determina por interpolación lineal.

El esquema del corte de la estructura con los coeficientes aerodinámicos se muestra en la figura 2.15.

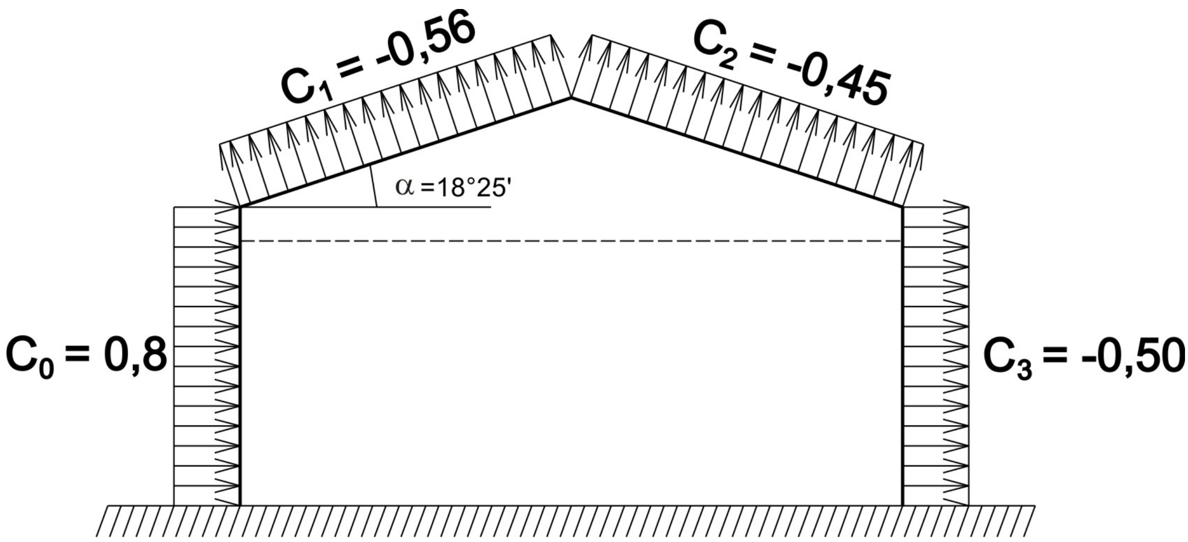


Fig. 2.15

b) Determinamos las cargas puntuales (figura 2.16):

$$W = n_2 q_0 cba \qquad (2.10)$$

Donde:

c - coeficiente aerodinámico (figura 2.15);

$b = 6m$ - distancia entre armaduras en el plano;

a - ancho del área tributaria por el contorno de la armadura.

$$W_1 = 1{,}2.0{,}34.0{,}8.6.\frac{2{,}0}{2} = 1{,}96kN \approx 2kN$$

$$W_2 = 1{,}2.0{,}34.(-0{,}56).6.\frac{4{,}0}{\cos\alpha} = -5{,}78kN \approx -5{,}8kN$$

$$W_3 = 1{,}2.0{,}34.(-0{,}45).6.\frac{4{,}0}{\cos\alpha} = -4{,}64kN \approx -4{,}6kN$$

$$W_4 = 1{,}2.0{,}34.(-0{,}50).6.\frac{2{,}0}{2} = -1{,}22kN \approx -1{,}2kN$$

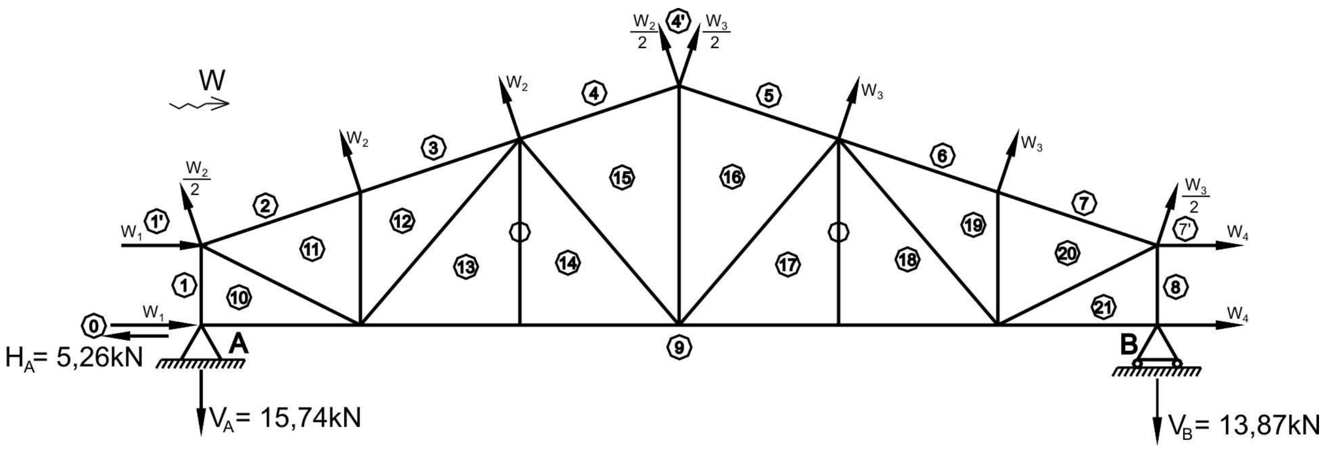


Fig. 2.16

c) Determinamos las reacciones en los apoyos:

Calculamos las resultantes de las cargas externas:

$$R_1 = 2W_1 = 2.2 = 4kN$$

$$R_2 = 3W_2 = 3.5,8 = 17,4kN$$

$$R_3 = 3W_3 = 3.4,6 = 13,8kN$$

$$R_4 = 2W_4 = 2.1,2 = 2,4kN$$

Luego tenemos:

$$\sum F_X = 0, \quad H_A + 4 + 2,4 - 17,4.0,316 + 13,8.0,316 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -5,26kN \leftarrow$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$-V_B.24 + (4+2,4).1,0 - 17,4.0,316.4 + 13,8.0,316.4 - 17,4.0,949.6 - 13,8.0,949.18 = 0$$

$$V_B = -13,87kN \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0, \quad V_A - 13,87 + 17,4.0,949 + 13,8.0,949 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = -15,74kN \downarrow$$

d) Calculamos analíticamente las fuerzas internas en las tres barras marcadas de la armadura (figura 2.17).

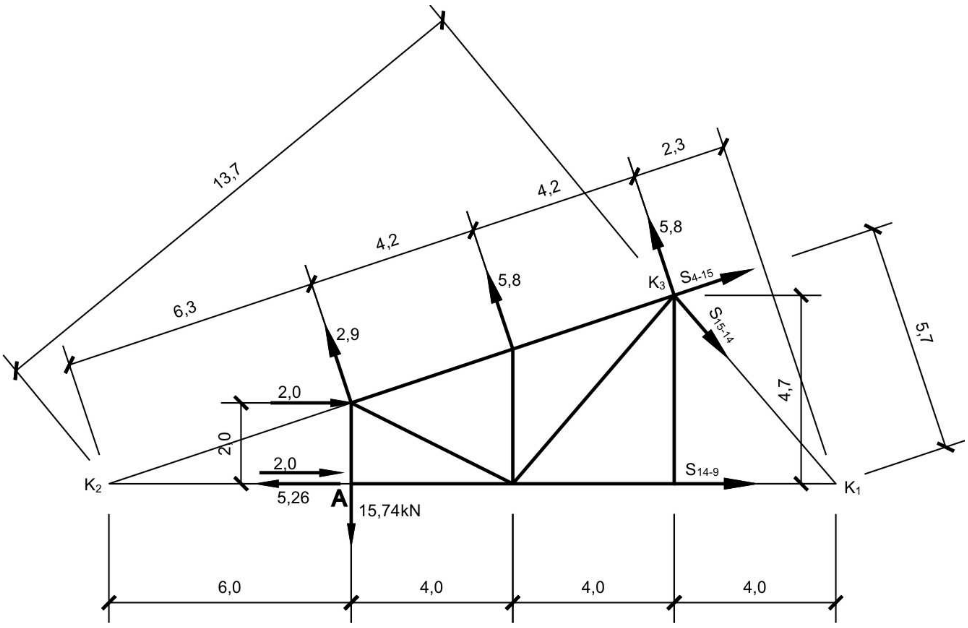


Fig. 2.17

$$\sum M_{K_1} = 0, \quad S_{4-15}.5,7 - 15,74.12 + 2.2 + 2,9.10,7 + 5,8.6,5 + 5,8.2,3 = 0$$

$$S_{4-15} = 18,04kN$$

$$\sum M_{K_2} = 0, \quad S_{15-14}.13,7 + 15,74.6 + 2.2 - 2,9.6,3 - 5,8.10,5 - 5,8.14,7 = 0$$

$$S_{15-14} = 4,82kN$$

$$\sum M_{K_3} = 0, \quad -S_{14-9}.4,7 - 15,74.8 + 5,26.4,7 - 2.4,7 - 2.2,7 + 2,9.8,4 + 5,8.4,2 = 0$$

$$S_{14-9} = -14,31kN$$

CALCULO DE LA ARMADURA ANTE LA CARGA VIVA – "VIENTO EN LA PARTE DERECHA DE LA ARMADURA"

a) Las cargas puntuales y las reacciones se muestran en la figura 2.18.

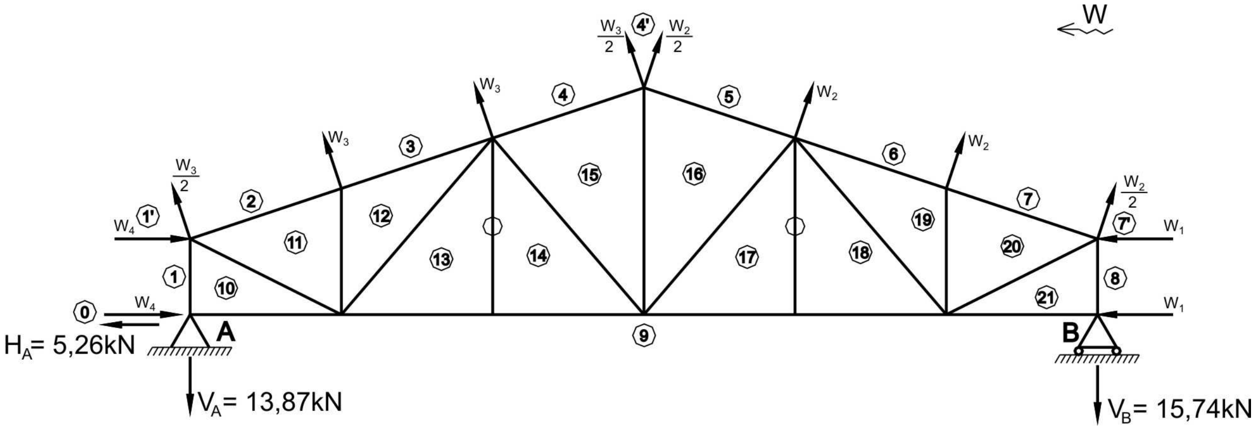


Fig. 2.18

b) Calculamos analíticamente las fuerzas internas en las tres barras marcadas de la armadura (figura 2.19).

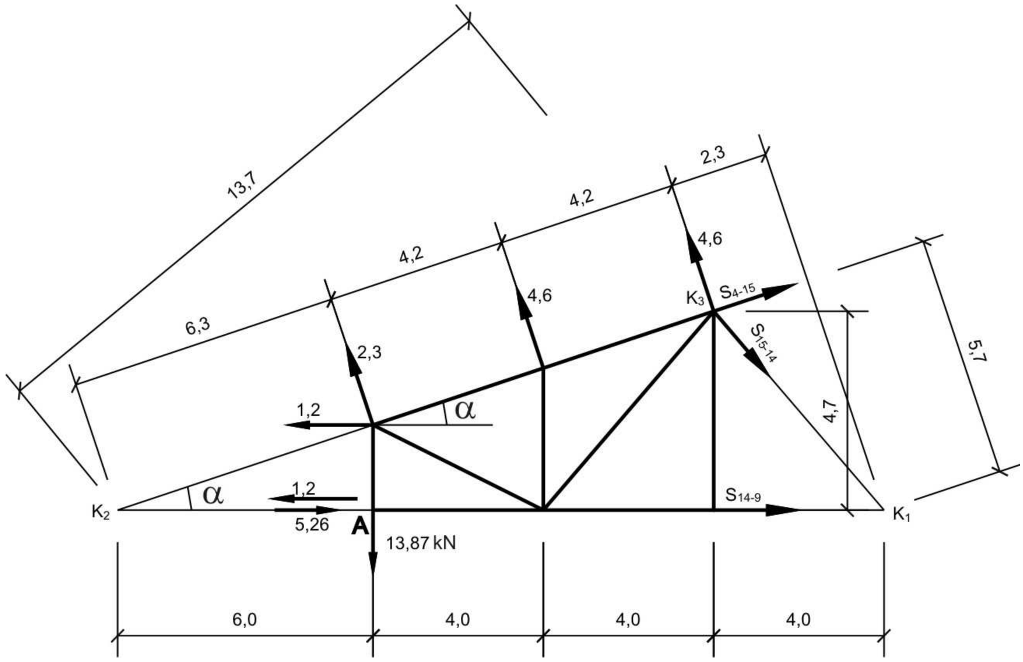


Fig. 2.19

$$\sum M_{K_1}=0\,,\quad S_{4-15}.5{,}7-13{,}87.12-1{,}2.2+2{,}3.10{,}7+4{,}6.6{,}5+4{,}6.2{,}3=0$$

$$S_{4-15}=18{,}20\text{kN}$$

$$\sum M_{K_2}=0\,,\quad S_{15-14}.13{,}7+13{,}87.6-1{,}2.2-2{,}3.6{,}3-4{,}6.10{,}5-4{,}6.14{,}7=0$$

$$S_{15-14}=3{,}62\text{kN}$$

$$\sum M_{K_3}=0\,,\quad -S_{14-9}.4{,}7-13{,}87.8-5{,}26.4{,}7+1{,}2.4{,}7+1{,}2.2{,}7+2{,}3.8{,}4+4{,}6.4{,}2=0$$

$$S_{14-9}=-18{,}76\text{kN}$$

En la tabla 2.3 se muestran los resultados de los cálculos de la armadura ante la carga muerta (peso propio); carga viva: nieve en la parte izquierda, nieve en la parte derecha, nieve en toda la armadura; carga viva: viento en la parte izquierda y viento en la parte derecha de la armadura.

Tabla 2.3

Barra	Carga muerta (kN)	Carga de nieve (kN)			Carga de viento (kN)	
		Izquierda	Derecha	Total	Izquierda	Derecha
$S_{4\text{-}15}$	-151,6	-53,7	-53,7	-107,4	18,04	18,20
$S_{15\text{-}14}$	-31,5	-33,5	11,2	-22,3	4,82	3,62
$S_{14\text{-}9}$	163,4	72,3	43,4	115,7	-14,31	-18,76

LINEA DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS INTERNAS EN LAS BARRAS DE LA ARMADURA

a) Elaboramos las ecuaciones de las líneas de influencia cuando la carga movible unitaria está a la izquierda o derecha del corte (tabla 2.4)

Tabla 2.4

Carga unitaria a la izquierda del corte	Carga unitaria a la derecha del corte
$\sum M_{K_1}^{der}=0$ $-S_{4-15}.5,7-R_B.12=0$ $S_{4-15}=-2,1R_B$	$\sum M_{K_1}^{izq}=0$ $S_{4-15}.5,7+R_A.12=0$ $S_{4-15}=-2,1R_A$
$\sum M_{K_2}^{der}=0$ $-S_{15-14}.13,7-R_B.30=0$ $S_{15-14}=-2,19R_B$	$\sum M_{K_2}^{izq}=0$ $S_{15-14}.13,7-R_A.6=0$ $S_{15-14}=0,44R_A$
$\sum M_{K_3}^{der}=0$ $S_{14-9}.4,7-R_B.16=0$ $S_{14-9}=3,4R_B$	$\sum M_{K_3}^{izq}=0$ $-S_{14-9}.4,7+R_A.8=0$ $S_{14-9}=1,7R_A$

En base a estos resultados, graficamos las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas en las barras 4-15, 15-14 y 14-9, tal como se muestra en la figura 2.20.

b) Comprobamos a través de las líneas de influencia, los valores de las reacciones y fuerzas internas de la armadura sometida a la carga viva “nieve en la parte izquierda”.

$$R_A=\sum_{L.I.R_A}P_i y_i=17.1+34.0,833+34.0,667+17.0,5=76,5kN$$

$$R_B=\sum_{L.I.R_B}P_i y_i=34.0,167+34.0,333+17.0,5=25,5kN$$

$$S_{4-15}=\sum_{L.I.S_{4-15}}P_i y_i=-(34.0,35+34.0,7+17.1,05)=-53,55kN$$

$$S_{15-14}=\sum_{L.I.S_{15-14}}P_i y_i=-34.0,37-34.0,73+17.0,22=-33,66kN$$

$$S_{14-9} = \sum_{L.I.S_{14-9}} P_i y_i = 34.0{,}57 + 34.1{,}13 + 17.0{,}85 = 72{,}25\text{kN}$$

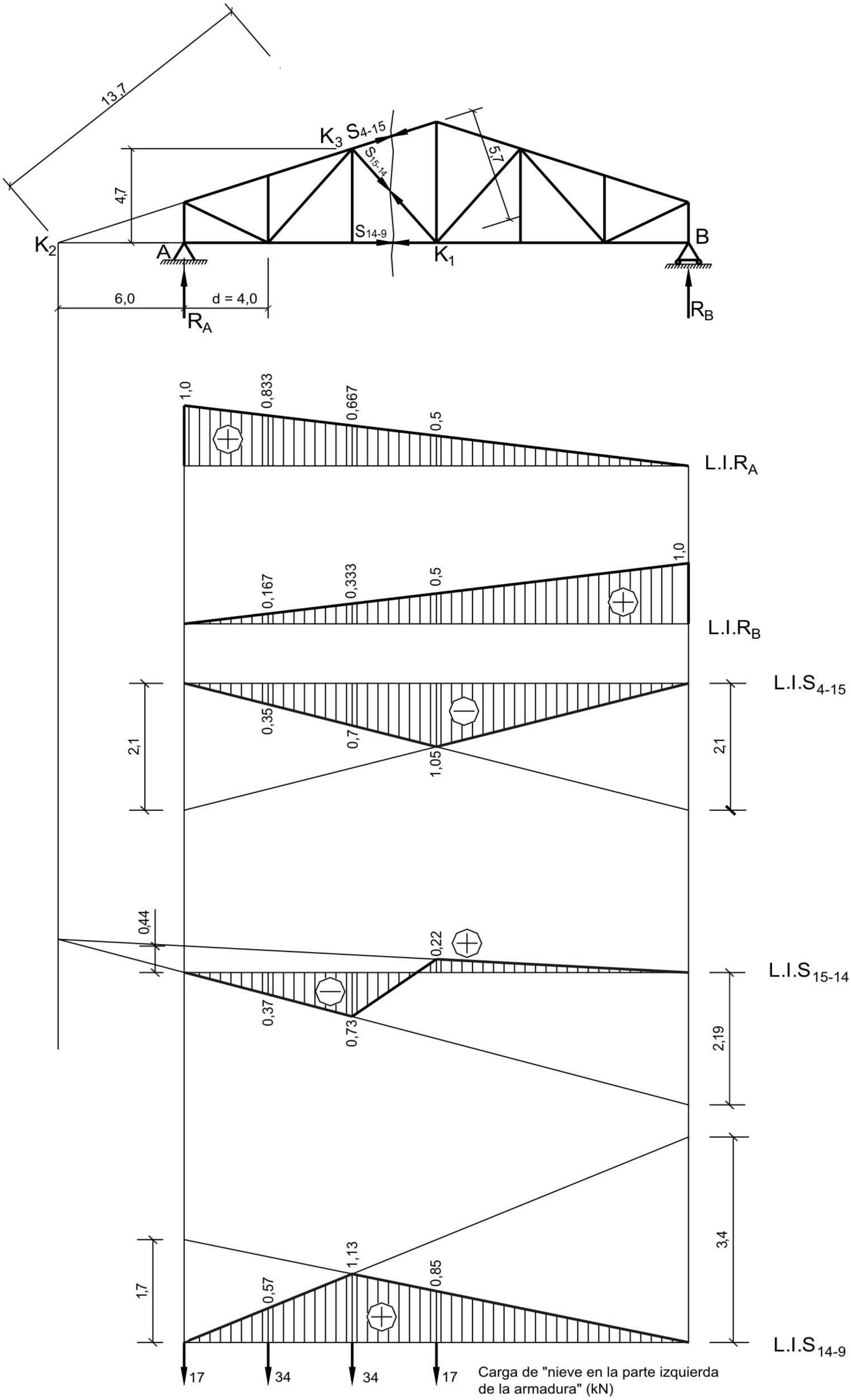


Fig. 2.20

En la tabla 2.5 se muestra la comparación de resultados del cálculo analítico con el obtenido a través de las líneas de influencia y el error porcentual, tomando como resultado exacto el obtenido por el cálculo analítico.

Tabla 2.5

Reacción o fuerza interna	Cálculo analítico (kN)	Cálculo por líneas de influencia (kN)	Error porcentual (%)
R_A	76,5	76,5	0
R_B	25,5	25,5	0
S_{4-15}	-53,7	-53,55	0,28
S_{15-14}	-33,5	-33,66	-0,48
S_{14-9}	72,3	72,25	0,07

CAPITULO 3
METODO DE LAS FUERZAS

En los dos primeros capítulos se indicó que las estructuras deben ser geométricamente estables y fijas. La condición necesaria de este principio es el grado de indeterminación de la edificación que debe ser igual a cero o positivo. Desde el punto de vista de formación de la estructura, la condición $G.I. < 0$ implica que el sistema es geométricamente inestable y no puede servir como esquema de cálculo; $G.I. = 0$ indica, que el número de conexiones cinemáticas, que unen las diferentes partes de la estructura y fijadas a la tierra es mínima necesaria; $G.I. > 0$ implica que el número de conexiones cinemáticas que conforman la estructura supera el número mínimo necesario.

Desde el punto de vista de cálculo, la condición $G.I. = 0$ implica que la estructura es isostática o estáticamente determinada. La condición $G.I. > 0$ corresponde a estructuras hiperestáticas o estáticamente indeterminadas. En este caso es imposible determinar las fuerzas internas a partir de las ecuaciones de equilibrio estático.

En general, para determinar el grado de indeterminación de una estructura, se puede utilizar la fórmula de Chebishev:

$$G.I. = -(3D - 2A - R) \tag{3.1}$$

Donde:

$G.I.$ - grado de indeterminación del sistema;

D - número de discos;

A - número de articulaciones o rótulas simples;

R - número de reacciones en los apoyos.

Existen varios métodos de cálculo de pórticos hiperestáticos, siendo uno de ellos del método de las fuerzas.

En este método el grado de hiperestaticidad $"n"$ se reemplaza en el proceso de cálculo por esquemas isostáticos, los cuales se obtienen eliminando $"n"$ conexiones, reemplazándolos por fuerzas desconocidas $x_i (i = 1,2,....,n)$.

El nuevo esquema se denomina *sistema principal del método de las fuerzas*. Este esquema debe ser obligatoriamente geométricamente estable y fijo, debiendo ser sencillo para el cálculo.

Al sistema principal se le aplica la acción externa (cargas, efecto de temperatura, asentamientos en los apoyos) del esquema inicial, así como las fuerzas desconocidas $x_i (i = 1,2,....,n)$. Estas fuerzas son las incógnitas principales que son necesarias calcularlas.

El sistema principal, que se encuentra bajo la acción de los factores indicados, debe ser completamente equivalente al sistema inicial. En ella deben surgir las mismas fuerzas internas y desplazamientos, que en el sistema inicial.

En particular, se puede analizar los puntos del sistema principal, en los cuales están aplicadas las fuerzas desconocidas $x_i (i = 1,2,....,n)$. Se escriben los desplazamientos de estos puntos en las direcciones de las desconocidas x_i. Los desplazamientos indicados se igualan a los desplazamientos

de los mismos puntos del sistema inicial. De esta manera, se obtiene un sistema de $"n"$ ecuaciones algebraicas con $"n"$ incógnitas x_i, cuya solución nos debe dar los valores de las fuerzas x_i. Este sistema de ecuaciones se llama *sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas*.

Después de ello, es fácil determinar las fuerzas internas en la estructura inicial.

3.1 GRADO DE INDETERMINACION DEL SISTEMA

El grado de indeterminación de pórticos planos se puede determinar aplicando la siguiente fórmula:

$$G.I. = 3C - A \tag{3.2}$$

Donde:

C - número de contornos cerrados del pórtico;

A - número de articulaciones simples, incluyendo las rótulas de los apoyos.

Se llama rótula simple a aquella que une 2 barras. La rótula que une $"m"$ barras, es equivalente a $m-1$ rótulas simples. El apoyo fijo es equivalente a una rótula simple y el apoyo movible (sobre rodillos) es equivalente a dos rótulas simples.

A continuación analizamos algunos ejemplos de determinación del grado de indeterminación del sistema.

EJEMPLO 1. Determinar el grado de indeterminación del pórtico mostrado en la figura 3.1,a.

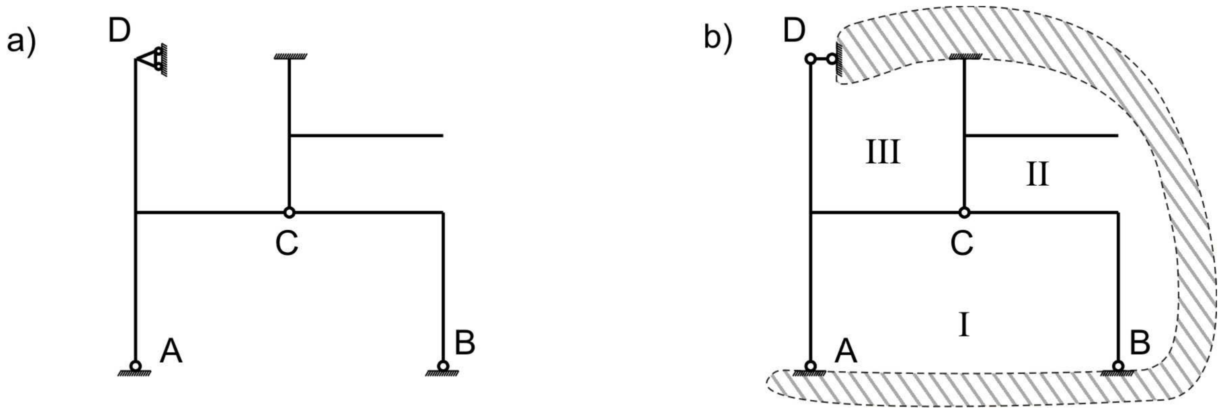


Fig. 3.1

El pórtico tiene 3 contornos cerrados I, II y III (figura 3.1,b). El apoyo movible "D" es equivalente a dos rótulas simples; la rótula "C" une a tres barras y es igual a dos rótulas simples. Consecuentemente, el número de rótulas es $A = 6$.

El grado de indeterminación del pórtico es:

$$G.I. = 3.3 - 6 = 3$$

El pórtico es tres veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

EJEMPLO 2. Determinar el grado de indeterminación del pórtico mostrado en la figura 3.2,a.

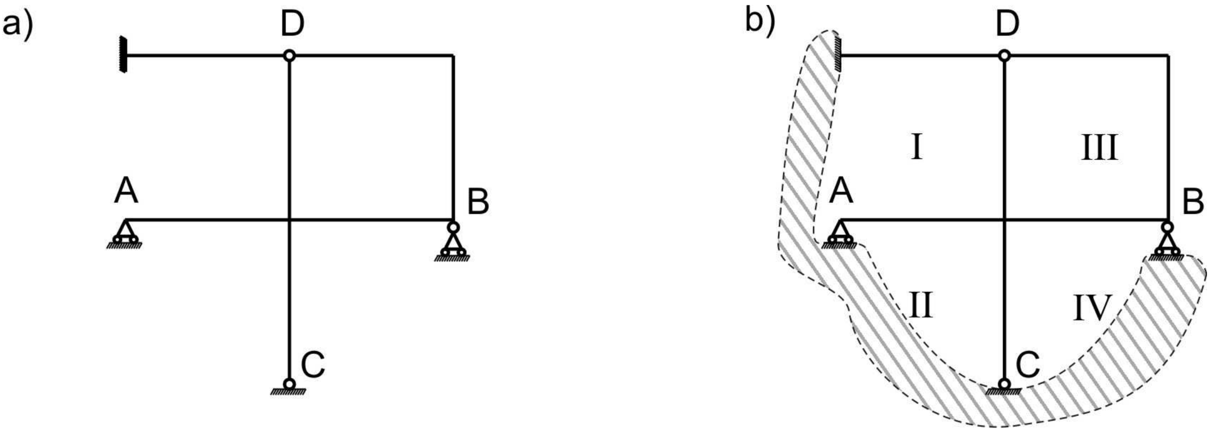


Fig. 3.2

El pórtico tiene 4 contornos cerrados I, II, III y IV (figura 3.2,b). El número de rótulas simples del pórtico es $A = 7$ (rótula simple "C", dos rótulas simples en cada apoyo movible "A" y "B" y en el nudo "D" por unir a tres barras).

El grado de indeterminación del pórtico será:

$$G.I. = 3.4 - 7 = 5$$

El pórtico es cinco veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

3.2 ELECCION DEL SISTEMA PRINCIPAL

Después de haber determinado el grado de indeterminación del sistema, se analizan las posibles variantes de eliminación de las conexiones adicionales. El sistema principal del método de las fuerzas se determina a partir de la eliminación de $"n"$ conexiones adicionales del pórtico hiperestático inicial.

En los pórticos hiperestáticos se distinguen las conexiones absolutamente necesarias y probablemente necesarias.

Las conexiones absolutamente necesarias, son aquellas, cuya eliminación de una de ellas, transforma al pórtico hiperestático en inestable. No se permite la eliminación de estas conexiones en la elección del sistema principal.

Las conexiones, cuya eliminación no permite transformar al pórtico hiperestático en inestable, se denominan probablemente necesarias.

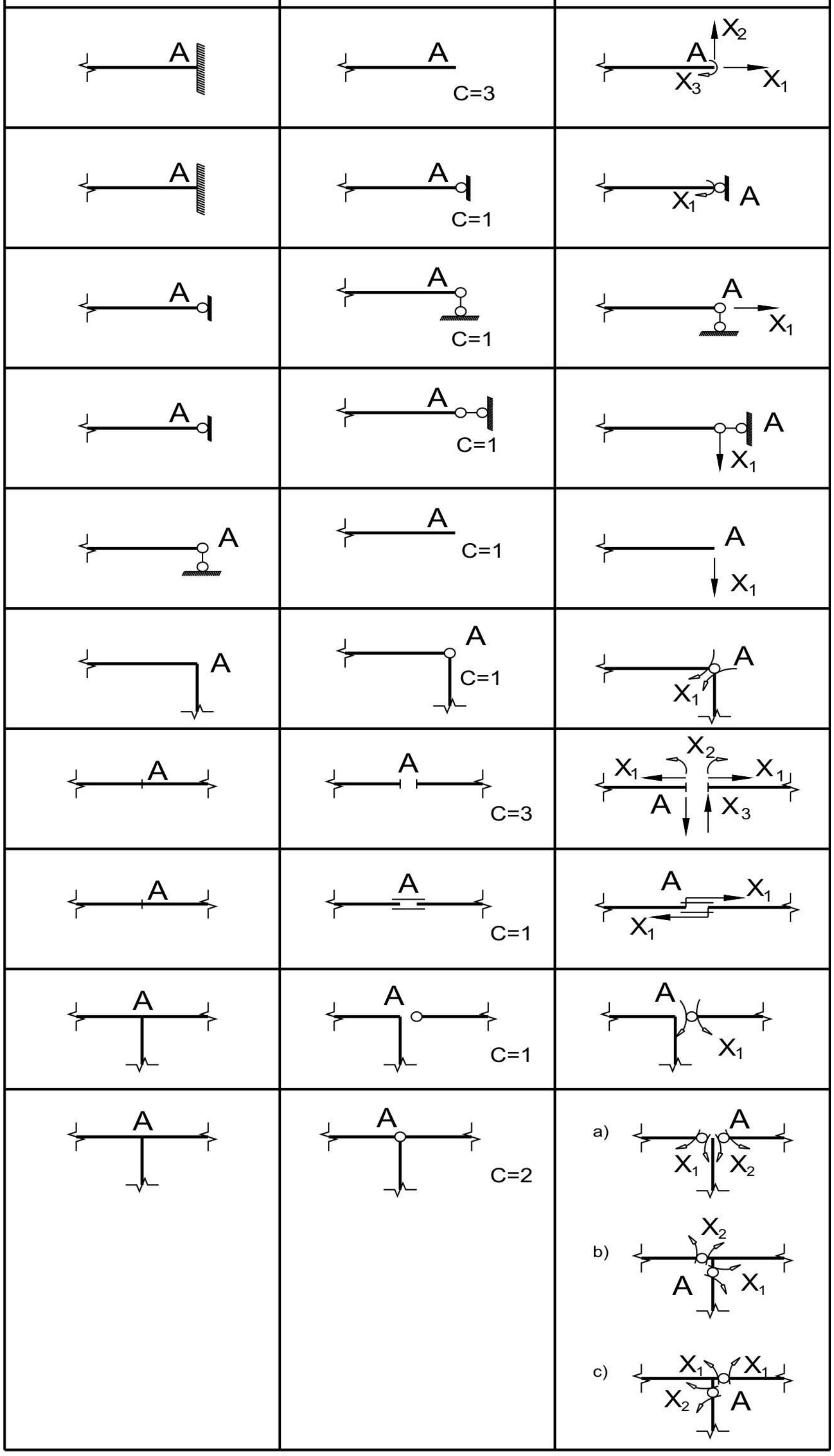
Para la elección del sistema principal se permite eliminar solamente las conexiones probablemente necesarias.

Cabe indicar que la eliminación de una barra es equivalente a la eliminación de una conexión cinemática; la colocación de una rótula simple equivale a la eliminación de una conexión; la colocación de una rótula compleja, equivalente a $"m"$ rótulas simples, es igual a la eliminación de m conexiones; el corte de una barra del pórtico es equivalente a la eliminación de tres conexiones.

En el sistema principal deben de surgir las mismas fuerzas que en el sistema inicial. Por ello, en el sistema principal, en lugar de las conexiones eliminadas, se reemplazan por fuerzas que surgen en ellas en el sistema inicial. En la tabla 3.1 se muestran algunos ejemplos de eliminación de conexiones y su reemplazo por fuerzas y momentos.

Tabla 3.1

NUDOS DEL PORTICO INICIAL	NUDOS DEL SISTEMA PRINCIPAL, CANTIDAD DE CONEXIONES ELIMINADAS (C)	FUERZAS QUE REEMPLAZAN A LAS CONEXIONES ELIMINADAS



Analicemos el pórtico mostrado en la figura 3.3,a. Dicho pórtico es tres veces estáticamente indeterminado. Las conexiones A, B y C son absolutamente necesarias. En la figura 3.3,b se muestra una variante del sistema principal, que se ha obtenido como producto del corte de la viga; en la figura 3.3,c la variante del sistema principal se obtuvo introduciendo tres rótulas simples.

Este ejemplo nos muestra que existen varios sistemas principales para un determinado pórtico hiperestático.

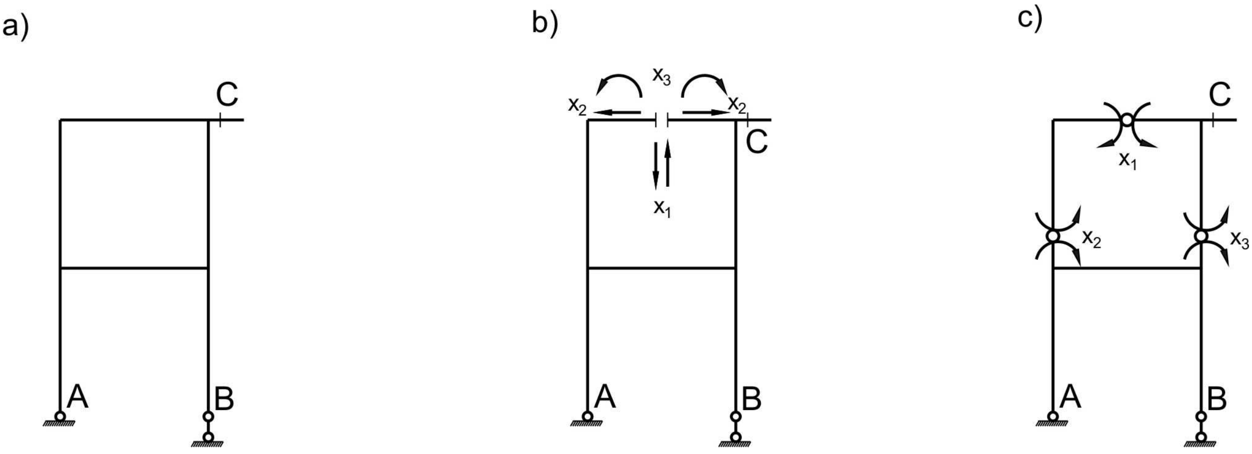


Fig. 3.3

En número de incógnitas para un pórtico concreto, es una magnitud constante y no depende de la variante del sistema principal. Este se determina, solamente, a través del grado de indeterminación del sistema. Para ello, se debe de elegir el sistema principal, que aminore el cálculo estructural.

A continuación indicamos las exigencias que debe de cumplir un sistema principal racional:

a) Como norma se recomienda la inclusión de rótulas en la elección del sistema principal, donde los diagramas de momento flector tendrán una forma sencilla, disminuyendo el cálculo.
b) De todos los probables sistemas principales, será necesario elegir aquel sistema, cuyo diagrama de momento flector tendrá un carácter local.
c) Para el cálculo de pórticos hiperestáticos simétricos, en lo posible, los sistemas principales deben ser también simétricos.

La elección del sistema principal más adecuado, solo se puede conocer si se realiza la comparación de probables variantes. Es necesario elaborar dos o tres variantes del sistema principal y elegir aquel, que sea menos laborioso.

EJEMPLO 3. Para el pórtico hiperestático de la figura 3.4,a; indicar tres posibles variantes de sistemas principales.

El grado de indeterminación del pórtico será:

$$G.I. = 3.2 - 4 = 2$$

El pórtico es dos veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

Si eliminamos las conexiones horizontales en las rótulas A y C, que se oponen al desplazamiento horizontal de estos puntos, entonces el sistema principal tiene la forma mostrada en la figura 3.4,b. En este caso, las incógnitas x_1, x_2 son las reacciones en las conexiones horizontales

eliminadas. En la elección de este sistema principal, nosotros eliminamos conexiones externas. El sistema principal de la figura 3.4,c se obtiene eliminando una conexión externa y otra interna. También se puede admitir como sistema principal el mostrado en la figura 3.4,d; donde se eliminaron dos conexiones internas, que absorben los momentos flectores en los nudos rígidos D y M del pórtico. En este caso, las incógnitas x_1 y x_2 vienen a ser los momentos flectores en los extremos de las barras que llegan a los nudos D y M.

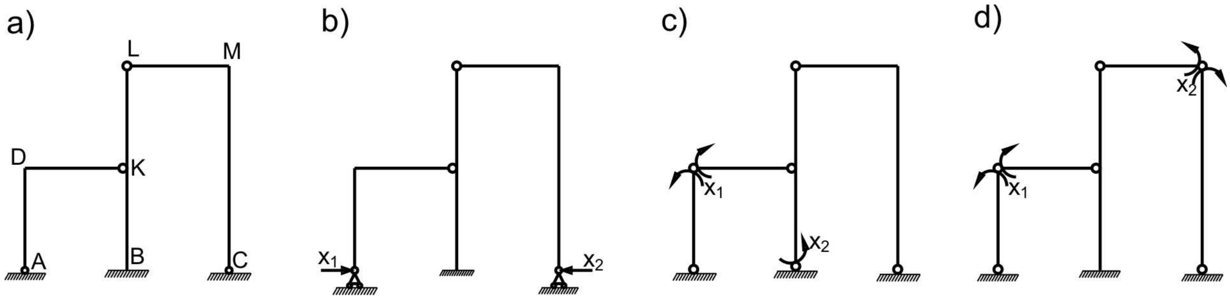


Fig. 3.4

3.3 SISTEMA DE ECUACIONES CANONICAS

Analicemos el pórtico mostrado en la figura 3.5,a. Dicho pórtico es tres veces estáticamente indeterminado o hiperestático. En la figura 3.5,b se muestra una de las posibles variantes del sistema principal. Como se indicó anteriormente, el sistema principal debe ser equivalente al sistema inicial.

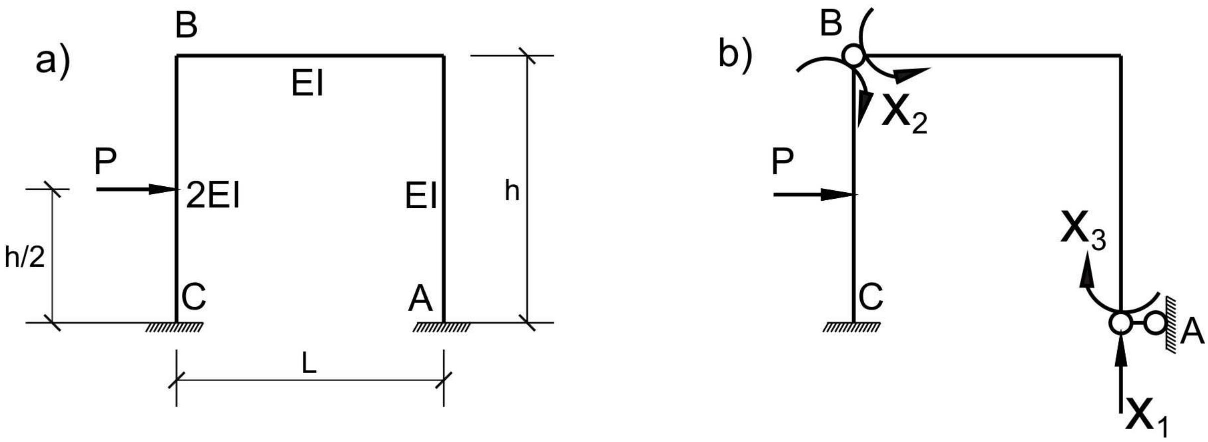


Fig. 3.5

Para el sistema principal analizado y el esquema inicial, se deben de cumplir las siguientes condiciones:

a) El desplazamiento vertical del punto A (desplazamiento del punto de acción de la fuerza x_1 en la dirección x_1) del sistema principal, originado por las fuerzas x_1, x_2, x_3 y la carga externa, debe de ser igual al desplazamiento vertical del punto A del sistema inicial, esto quiere decir igual a cero.

b) El ángulo de giro de los ejes en el punto B (desplazamiento angular del punto de acción del momento x_2 en la dirección x_2) del sistema principal, originado por las fuerzas x_1, x_2, x_3 y la carga externa, debe de ser igual al ángulo de giro de los ejes del punto B del sistema inicial, esto es igual a cero.

c) El ángulo de giro del eje de la columna en el punto A (desplazamiento angular del punto de acción del momento x_3 en la dirección x_3) del sistema principal, originado por las fuerzas x_1, x_2, x_3 y la carga externa, debe de ser igual al ángulo de giro de la columna en el punto A del sistema inicial, esto quiere decir igual a cero.

Las ecuaciones que cumplen con las condiciones indicadas tienen la forma:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0$$
$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0$$

En general, para un pórtico con grado de hiperestaticidad $"n"$ y sometido a cargas externas, el sistema de ecuaciones canónicas tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} = 0 \\
&\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2P} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nP} = 0
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Donde:

δ_{ik} - desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita x_i en la dirección x_i, debido a la acción de la carga $x_k = 1$;

Δ_{iP} - desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita x_i en la dirección x_i, debido a la acción de la carga externa.

Los coeficientes δ_{ik} y Δ_{iP} se denominan respectivamente, coeficiente del sistema de ecuaciones canónicas y miembro libre o de carga del mismo sistema.

Como δ_{ik} y Δ_{iP} son desplazamientos, entonces para su cálculo se puede utilizar la fórmula de Mohr y sus correspondientes formas de cálculo de integrales, como la fórmula de Simpson-Kornoujov o el método de Vereschaguin:

$$\delta_{ik} = \sum \int_L \frac{M_i M_k}{EI} dx \qquad (3.4)$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int_L \frac{M_i M_P}{EI} dx$$

Donde:

$i, k = 1,2,\ldots\ldots\ldots, n$

M_i, M_k - diagramas de momento flector, que surgen en el sistema principal, debido a la acción de las fuerzas $x_i = 1$ y $x_k = 1$;

M_P - diagrama de momento flector, que surge en el sistema principal, debido a la acción de las cargas externas.

De esta manera, para determinar los coeficientes δ_{ik} y los miembros de carga Δ_{iP} del sistema de ecuaciones canónicas, será necesario analizar los denominados estados de carga unitaria y carga externa del sistema principal.

El estado de carga externa del sistema principal, es aquel por el cual el pórtico está sometido solo a las cargas externas.

El estado de carga unitaria $"i"$ del sistema principal, es aquella que surge debido a la acción de la fuerza $x_i = 1$, aplicado en el pórtico dado. Esta fuerza se aplica en el punto de acción y en la dirección de la fuerza desconocida x_i. El número de estados unitarios de carga es igual al número de incógnitas $"n"$.

En los estados de cargas externas y unitarias del sistema principal, será necesario determinar las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de momento flector M_P (de carga externa) y $M_i (i = 1,2,...,n)$ (de carga unitaria).

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la fórmula 3.3, cuyos coeficientes se calculan por la fórmula 3.4, contiene en su diagonal principal miembros positivos, esto es $\delta_{ii} > 0$. Los coeficientes ubicados simétricamente a la diagonal principal son iguales, esto es $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, fundamentándose en la ley de reciprocidad de desplazamientos. Consecuentemente, la matriz de los coeficientes $\|\delta_{ik}\|$ del sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, siempre será simétrica.

La solución del sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, permite calcular las magnitudes de las fuerzas en las conexiones eliminadas del pórtico y, de esta manera, graficar los diagramas finales de fuerzas internas en el pórtico hiperestático.

3.4 DIAGRAMAS FINALES DE FUERZAS INTERNAS

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por las siguientes fórmulas:

$$M = M_1 x_1 + M_2 x_2 + ... + M_n x_n + M_P$$
$$V = V_1 x_1 + V_2 x_2 + ... + V_n x_n + V_P \qquad (3.5)$$
$$N = N_1 x_1 + N_2 x_2 + ... + N_n x_n + N_P$$

Donde:

M, V, N - diagramas finales de fuerzas internas;

M_i, V_i, N_i - diagramas de fuerzas internas en el estado unitario de carga $"i"$ del sistema principal;

M_P, V_P, N_P - diagramas de fuerzas internas en el estado de carga externa del sistema principal;

$x_i (i = 1,2,....., n)$ - valores de las fuerzas desconocidas.

En ciertos casos, la sumatoria de diagramas de la fórmula 3.5 se aplica solo a momentos flectores, debido a que el diagrama de fuerzas cortantes V se obtiene a partir del diagrama M, a través de la dependencia diferencial de la fórmula 3.6.

$$V_{(X)} = \frac{dM_{(X)}}{dx} \qquad (3.6)$$

Las fuerzas axiales o normales se determinarán a partir de la condición de equilibrio de los nudos del pórtico. A dichos nudos del pórtico se le aplicarán las cargas externas existentes, fuerzas cortantes calculadas anteriormente y las fuerzas axiales desconocidas. Después de ello, se elaborarán para estos nudos las ecuaciones de equilibrio y a partir de ellas se encontrarán las fuerzas axiales en las barras del pórtico. El equilibrio de los nudos se debe de analizar de tal manera que en cada nudo no existan más de dos fuerzas axiales desconocidas.

A partir de los diagramas finales M, V, N se determinarán las reacciones en los apoyos y se comprobarán las ecuaciones generales de equilibrio, donde "K" es cualquier punto del pórtico.

$$\sum F_X = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \qquad (3.7)$$
$$\sum M_K = 0$$

3.5 COMPROBACION CINEMATICA DEL DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

Para comprobar el diagrama final M se calcula el desplazamiento del pórtico inicial, donde se conoce que es igual a cero y aplicamos la fórmula de Mohr:

$$\Delta_j = \sum \int_L \frac{M_j M}{EI} dx \qquad (3.8)$$

Donde:

Δ_j - desplazamiento del sistema inicial, donde se conoce que es igual a cero;

M - diagrama de momento flector en el pórtico hiperestático inicial.

Para graficar M_j, el pórtico inicial se reemplaza por cualquier sistema principal. La condición necesaria será la eliminación de la conexión en la dirección de dicho desplazamiento conocido. Luego al sistema principal se le aplica la carga unitaria en esta dirección y se grafica el diagrama de momento flector, el cual es M_j de la fórmula 3.8.

Por ejemplo, para obtener el desplazamiento horizontal del nudo C del pórtico de la figura 3.5,a; se puede utilizar una de las variantes de sistema principal mostrados en la figura 3.6, donde solo se muestran las cargas unitarias aplicadas en las direcciones del desplazamiento conocido.

En la comprobación cinemática no se permite utilizar el esquema de cálculo de sistema principal aplicado anteriormente, sino otra variante. Asimismo, para comprobar todos los tramos del

diagrama M, se debe de determinar tales desplazamientos del pórtico inicial, eligiendo las variantes de sistemas principales, donde el diagrama M_j aparece en todas las barras del pórtico.

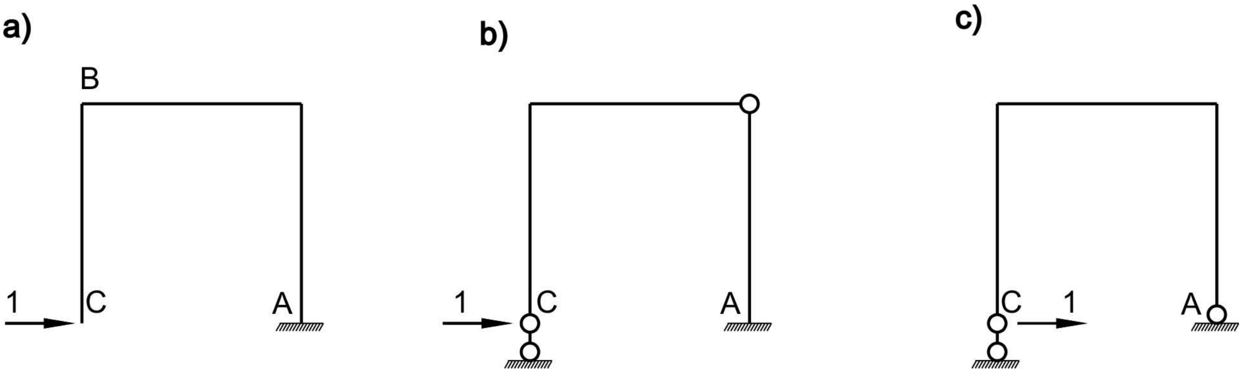


Fig. 3.6

En la comprobación cinemática se puede determinar no sólo un desplazamiento, sino varios del sistema principal, donde previamente es conocido que dicho desplazamiento es cero o la suma de tales desplazamientos.

Como en los cálculos numéricos existen errores debido a la aproximación de los resultados, entonces en la comprobación cinemática se permite un error porcentual menor al 3%.

3.6 EFECTO DE LA VARIACION DE TEMPERATURA

En el cálculo de pórticos con "n" grados de hiperestaticidad ante la acción de la temperatura, el esquema de cálculo no varía, solamente se reemplazan en las ecuaciones canónicas 3.3, los miembros de carga Δ_{iP} por los miembros libres Δ_{iT}. La magnitud Δ_{iT} viene a ser el desplazamiento de puntos del sistema principal, en los cuales se aplica la fuerza x_i en la dirección x_i, debido a la acción de la temperatura. Estos coeficientes Δ_{iT} se determinan por la fórmula 3.9.

$$\Delta_{iT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_i} \qquad (3.9)$$

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por la fórmula 3.5, siendo $M_P = 0$, $V_P = 0$ y $N_P = 0$.

3.7 EFECTO DE ASENTAMIENTO O DESPLAZAMIENTO DE APOYOS

En el cálculo de pórticos con "n" grados de hiperestaticidad ante el posible asentamiento o desplazamiento de los apoyos, su esquema de cálculo tampoco varía. En el sistema de ecuaciones canónicas 3.3, los miembros de carga Δ_{iP} se reemplazan por los miembros libres Δ_{iC}. La magnitud Δ_{iC} viene a ser el desplazamiento de puntos del sistema principal, en los cuales se aplica la fuerza x_i en la dirección x_i, debido al asentamiento o desplazamiento de apoyos del sistema principal. Estos coeficientes Δ_{iC} se determinan por la fórmula 3.10.

$$\Delta_{iC} = -\sum_{j=1}^{m} R_{ij}.C_j \qquad (3.10)$$

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por la fórmula 3.5, siendo $M_P = 0$, $V_P = 0$ y $N_P = 0$.

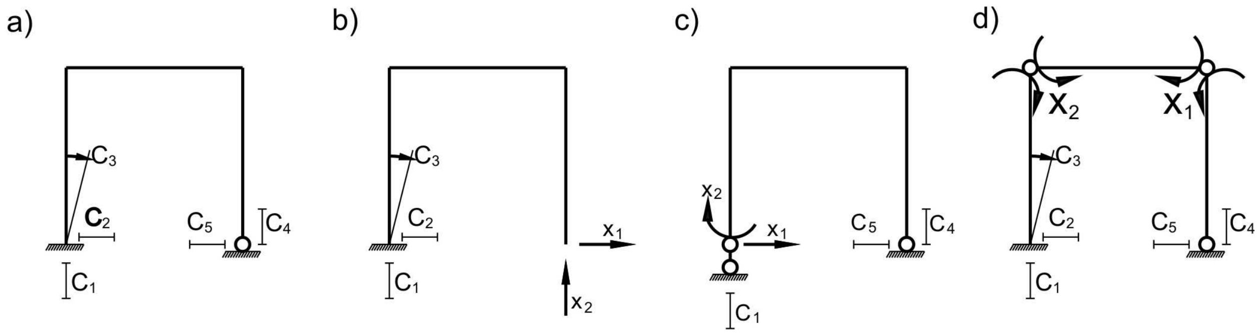


Fig. 3.7

Para calcular los desplazamientos Δ_{iC} del sistema principal, se dan tales desplazamientos del sistema inicial, que corresponden a las conexiones en los apoyos del sistema principal, conservando su dirección o sentido, dependiendo que sea fuerza o momento (figura 3.7,b,c,d).

Como ejemplo, mostramos la forma de las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas para las variantes del sistema principal mostradas en la figura 3.7,b,c,d.

Sistema principal de la figura 3.7,b:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1C} = -c_5$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2C} = c_4$$

Sistema principal de la figura 3.7,c:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1C} = c_2$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2C} = c_3$$

Sistema principal de la figura 3.7,d:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2C} = 0$$

3.8 PORTICOS SIMETRICOS

En el sistema de ecuaciones canónicas 3.3, mientras mayor sea el número de coeficientes δ_{ik} iguales a cero, entonces será menor el trabajo de cálculo estructural. Como se sabe, los coeficientes δ_{ik} se calculan por la fórmula 3.4 y serán iguales a cero, cuando se multipliquen diagramas de momento flector simétricos y antisimétricos, como producto de las cargas unitarias. Consecuentemente, los diagramas serán simétricos, si las cargas también son simétricas y los diagramas serán antisimétricos, si las cargas también son antisimétricas. Para disminuir el cálculo estructural en pórticos simétricos, se deben de cumplir las dos exigencias adicionales:

a) El sistema principal debe ser simétrico;
b) Las incógnitas deben ser simétricas y antisimétricas.

La primera exigencia se puede cumplir a través de la elección del sistema principal y la segunda exigencia mediante la agrupación de las incógnitas en simétricas y antisimétricas. Para ello, será necesario cumplir la regla, que si se eliminan dos conexiones simétricas, entonces en su lugar en el sistema principal se debe de aplicar dos grupos de incógnitas: simétricas y antisimétricas.

Para cumplir con dichas exigencias, se puede indicar que para un sistema simétrico con "n" grados de hiperestaticidad, las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas se dividen en dos sistemas de ecuaciones algebraicas independientes. En un sistema están las simétricas y en la otra las antisimétricas, aunque el número de incógnitas sea "n", de todas maneras se disminuirá el cálculo estructural.

EJEMPLO 4. Para el pórtico mostrado en la figura 3.8,a utilice el concepto de simetría para disminuir el cálculo estructural.

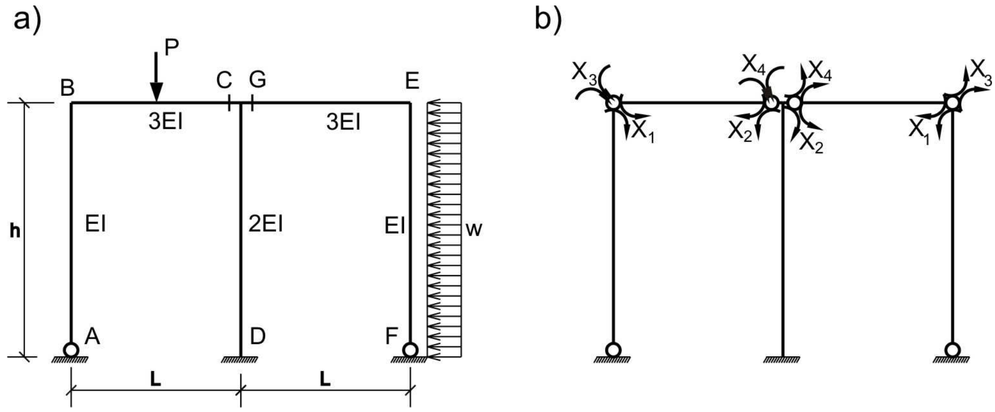


Fig. 3.8

El grado de indeterminación del pórtico será:

$$G.I. = 3.2 - 2 = 4$$

El pórtico es cuatro veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

Como el pórtico es simétrico, entonces elegimos un sistema principal simétrico, que se muestra en la figura 3.8,b.

Las incógnitas deben ser simétricas y antisimétricas. En los puntos simétricos B y E se colocan dos rótulas simples, que es equivalente a la eliminación de dos conexiones. En su lugar, en el sistema principal colocamos dos momentos desconocidos, el simétrico x_1 y el antisimétrico x_3. Análogamente colocamos las incógnitas x_2 y x_4 (figura 3.8,b). De esta manera, cada símbolo x_i implica un grupo de fuerzas, de donde proviene el nombre de *grupo de incógnitas*.

Si ahora analizamos los estados de carga unitaria y externa del sistema principal, podemos decir que los diagramas M_1 y M_2 serán simétricos, los diagramas M_3 y M_4 antisimétricos y el diagrama M_P tendrá forma general. De ello, se desprende que los coeficientes δ_{13}, δ_{14}, δ_{23}, δ_{24} y δ_{31}, δ_{41}, δ_{32}, δ_{42} serán iguales a cero y, en consecuencia, el sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas tendrá la forma:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{33}x_3 + \delta_{34}x_4 + \Delta_{3P} = 0$$

$$\delta_{43}x_3 + \delta_{44}x_4 + \Delta_{4P} = 0$$

Esto quiere decir, que dicho sistema se ha dividido en dos sistemas de ecuaciones independientes.

Mayor disminución de cálculo estructural de pórticos hiperestáticos simétricos se producirá si la acción externa (cargas, asentamientos o desplazamiento de apoyos, variación de temperatura) es simétrica o antisimétrica. Por ejemplo, si en el pórtico de la figura 3.8,a; actúa la carga distribuida de la figura 3.9, en este caso el diagrama M_P será simétrico.

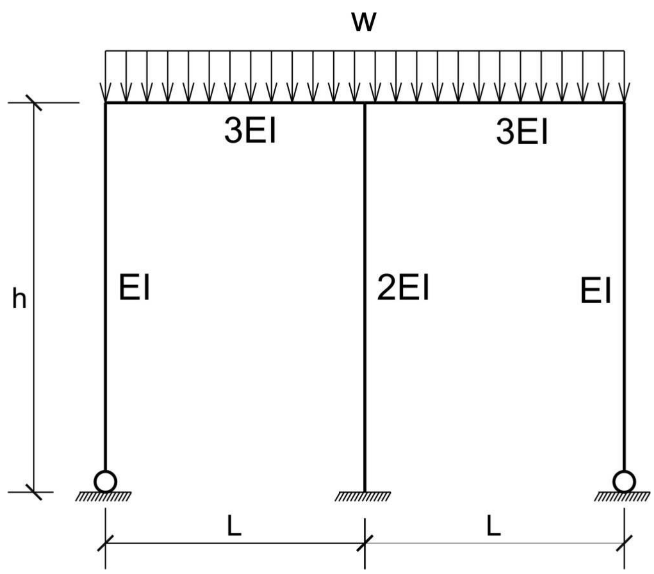


Fig. 3.9

Si utilizamos el sistema principal y las incógnitas mostradas en la figura 3.8,b; entonces en el sistema de ecuaciones canónicas los miembros de carga externa Δ_{3P} y Δ_{4P} serán iguales a cero, porque para su cálculo ha sido necesario multiplicar el diagrama simétrico M_P por los diagramas antisimétricos M_3 y M_4.

En este caso, la segunda parte del sistema de ecuaciones canónicas tendrá la siguiente forma:

$$\delta_{33}x_3 + \delta_{34}x_4 = 0$$

$$\delta_{43}x_3 + \delta_{44}x_4 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, esto es, las incógnitas antisimétricas por acción de las cargas externas simétricas resultaron ser iguales a cero.

3.9 CALCULO ANALITICO DE PORTICOS PLANOS

EJEMPLO 5. Resolver el pórtico mostrado en la figura 3.10.

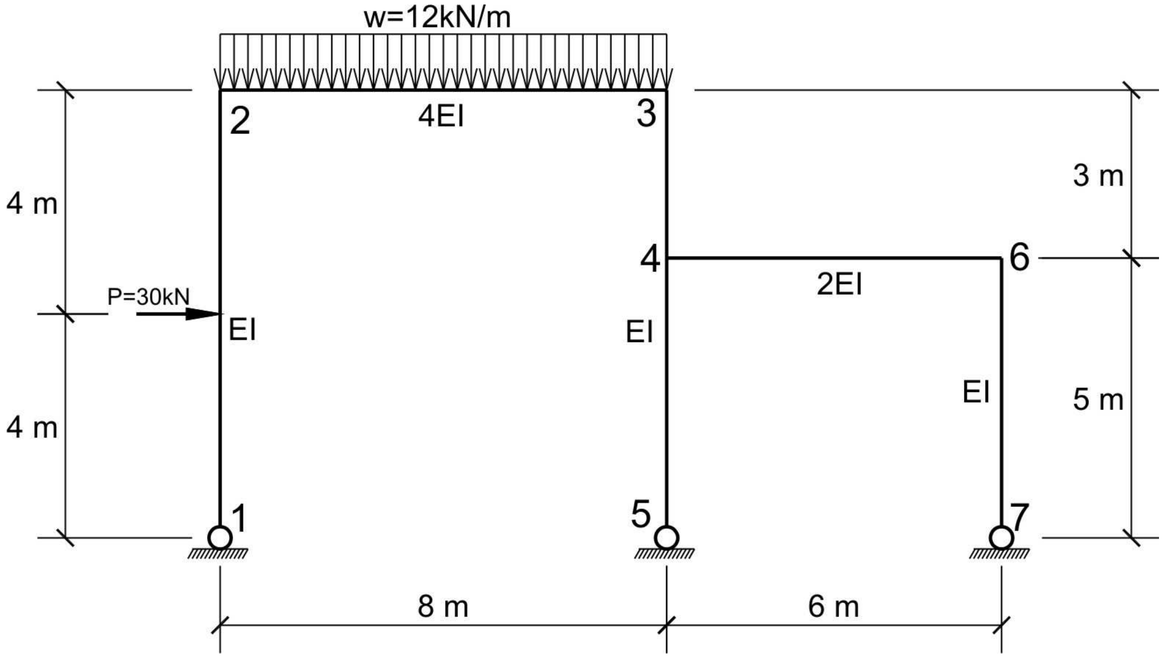


Fig. 3.10

Por la fórmula 3.2 determinamos el grado de indeterminación del sistema:

$$G.I. = 3.2 - 3 = 3$$

Elegimos el sistema principal, eliminando 3 conexiones adicionales. Las tres variantes del sistema principal se muestran en la figura 3.11,a,b,c.

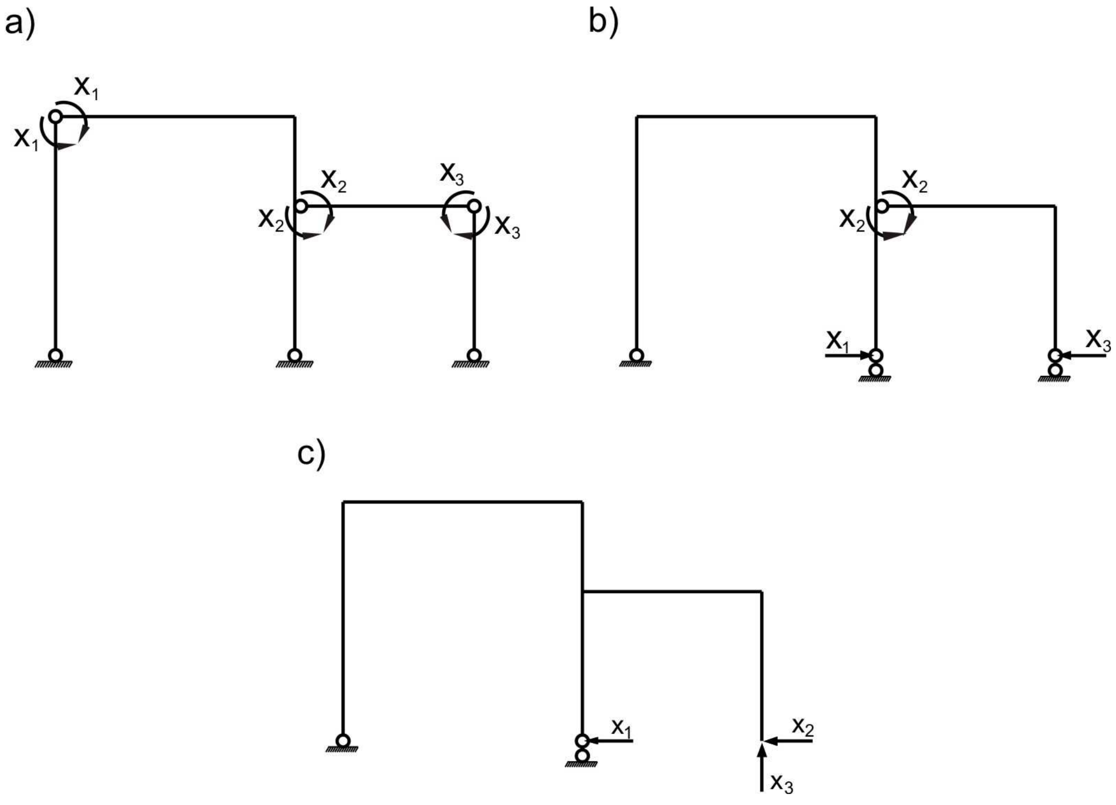


Fig. 3.11

En calidad de sistema principal de cálculo elegimos la variante de la figura 3.11,a.

Utilizando la fórmula general 3.3, escribimos el sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0$$

Las ecuaciones canónicas se han elaborado en base al principio de independencia de acción de cargas y aplicado a las diferentes variantes del sistema principal, los cuales contienen diversos sentidos físicos. En general, el sistema principal isostático debe ser tal, que las deformaciones en las conexiones eliminadas deben de ser igual a cero.

En nuestro caso (variante "a" de la figura 3.11), la primera ecuación contiene las componentes de desplazamiento, cuyo sentido se determina por el primer estado unitario $(x_1 = 1)$, esto es el quiebre o giro del nudo 2. El ángulo de giro total en este nudo se determina como la suma de sus componentes, que surgen por la acción consecutiva en el sistema principal de x_1, x_2, x_3 y la carga externa. En el esquema dado, el nudo 2 es rígido y el ángulo de giro es cero. Análogamente, la segunda ecuación corresponde al efecto en el sistema principal de unión rígida de barras en el nudo 4. La tercera ecuación tiene el sentido de igualdad a cero del ángulo de giro total del nudo 6.

Las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas se pueden analizar como condiciones conjuntas de deformaciones.

Para calcular por la fórmula 3.4, los coeficientes δ_{ik} $(i = 1,2,3; k = 1,2,3)$ y los miembros libres Δ_{iP}, analizamos los estados unitarios y de carga externa del sistema principal.

El primer, segundo y tercer estados unitarios de carga, se muestran en la figura 3.12,a,b,c. En la figura 3.12,d se muestra la suma de los diagramas M_1, M_2 y M_3, es decir M_Σ. Este diagrama es necesario para el control de cálculo de los coeficientes y miembros libres.

El estado de carga externa del sistema principal, se muestra en la figura 3.13.

Ahora calculamos los coeficientes δ_{ik}:

PRIMERA ECUACION:

$$\delta_{11} = \sum \int_L \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{4EI}.1.8.1 + \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1 = \frac{7,333}{EI}$$

$$\delta_{12} = \sum \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{4EI}.1.8.\frac{1}{2} + \frac{1}{EI}.1.3.\frac{13}{16} = \frac{3,438}{EI}$$

$$\delta_{13} = \sum \int_L \frac{M_1 M_3}{EI} dx = -\frac{1}{4EI}.1.8.\frac{1}{2} - \frac{1}{EI}.1.3.\frac{13}{16} - \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.\frac{5}{8}.5.\frac{2}{3}.1 = -\frac{4,479}{EI}$$

Comprobación: $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = \delta_{1\Sigma}$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = \frac{7,333}{EI} + \frac{3,438}{EI} - \frac{4,479}{EI} = \frac{6,292}{EI}$$

$$\delta_{1\Sigma} = \sum\int_L \frac{M_1 M_\Sigma}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{4EI}.1.8.1 + \frac{3}{6EI}\left(1.1 + 4.\frac{13}{16}.\frac{13}{16} + \frac{5}{8}.\frac{5}{8}\right) -$$

$$-\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.\frac{5}{8}.5.\frac{2}{3}.\frac{3}{8} = \frac{6,292}{EI}$$

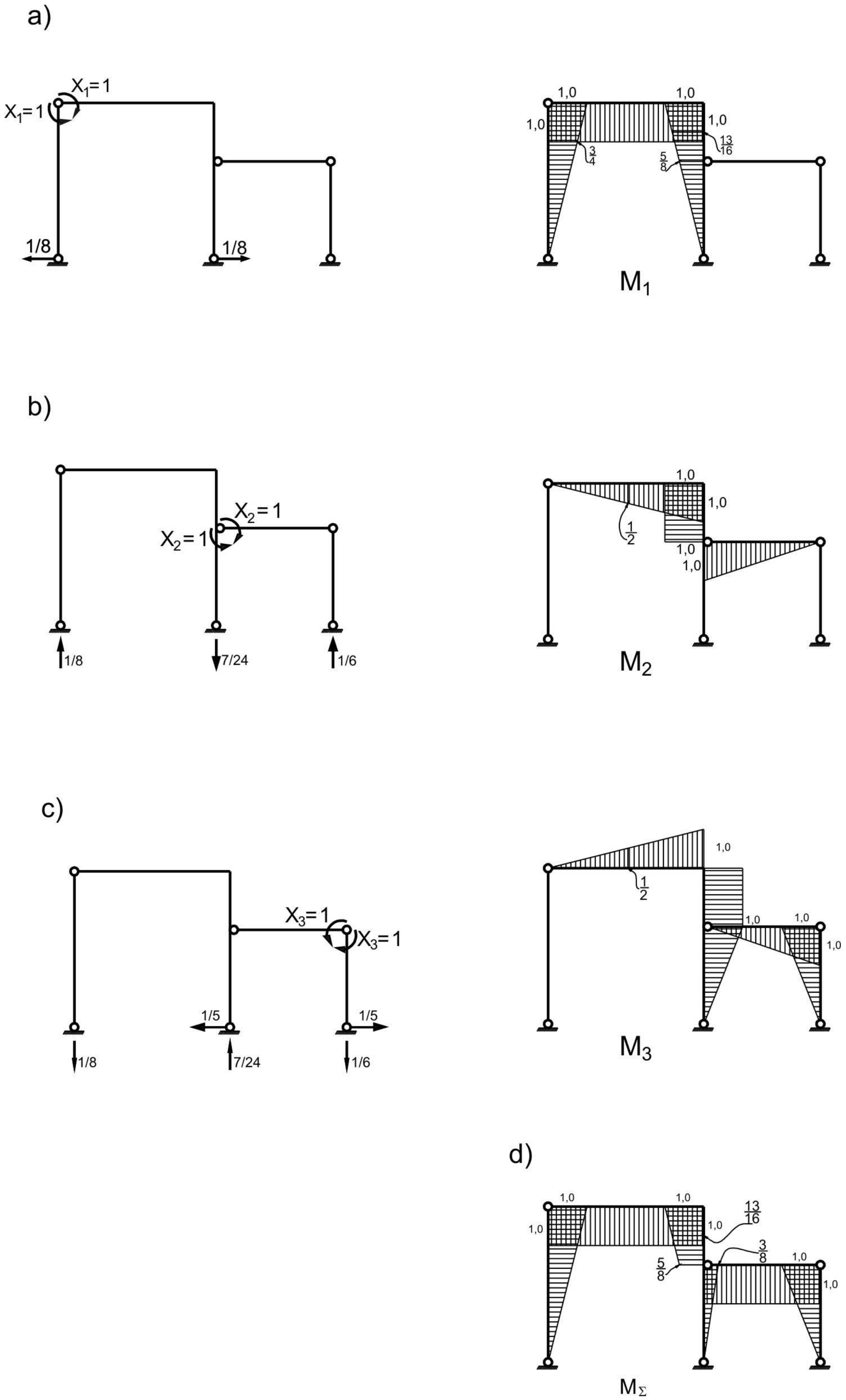


Fig. 3.12

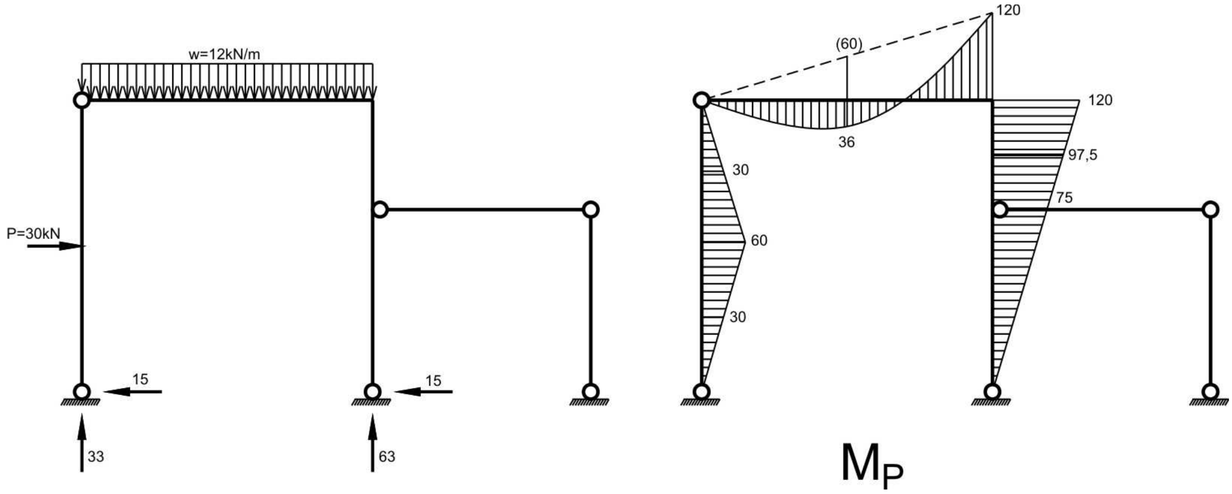


Fig. 3.13

SEGUNDA ECUACION:

$$\delta_{21}=\delta_{12}=\frac{3,438}{EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int_L\frac{M_2^2}{EI}dx=\frac{1}{4EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{EI}.1.3.1+\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{2}{3}.1=\frac{4,667}{EI}$$

$$\delta_{23}=\sum\int_L\frac{M_2M_3}{EI}dx=-\frac{1}{4EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1-\frac{1}{EI}.1.3.1+\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{1}{3}.1=-\frac{3,167}{EI}$$

Comprobación: $\delta_{21}+\delta_{22}+\delta_{23}=\delta_{2\Sigma}$

$$\delta_{21}+\delta_{22}+\delta_{23}=\frac{3,438}{EI}+\frac{4,667}{EI}-\frac{3,167}{EI}=\frac{4,938}{EI}$$

$$\delta_{2\Sigma}=\sum\int_L\frac{M_2M_\Sigma}{EI}dx=\frac{1}{4EI}.\frac{1}{2}.1.8.1+\frac{1}{EI}.1.3.\frac{13}{16}+\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.1=\frac{4,938}{EI}$$

TERCERA ECUACION:

$$\delta_{31}=\delta_{13}=-\frac{4,479}{EI}$$

$$\delta_{32}=\delta_{23}=-\frac{3,167}{EI}$$

$$\delta_{33}=\sum\int_L\frac{M_3^2}{EI}dx=\frac{1}{4EI}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{EI}.1.3.1+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.5.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{2}{3}.1+$$

$$+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.5.\frac{2}{3}.1=\frac{8,0}{EI}$$

Comprobación: $\delta_{31}+\delta_{32}+\delta_{33}=\delta_{3\Sigma}$

$$\delta_{31}+\delta_{32}+\delta_{33}=-\frac{4,479}{EI}-\frac{3,167}{EI}+\frac{8,0}{EI}=\frac{0,354}{EI}$$

$$\delta_{3\Sigma}=\sum\int_L\frac{M_3M_\Sigma}{EI}dx=-\frac{1}{4EI}.\frac{1}{2}.1.8.1-\frac{1}{EI}.1.3.\frac{13}{16}+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.5.\frac{2}{3}.\frac{3}{8}+\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.1+$$

$$+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.5.\frac{2}{3}.1=\frac{0,354}{EI}$$

Si cualquiera de las comprobaciones no se cumple, esto quiere decir, que en el cálculo de los coeficientes han existido errores.

Ahora calculamos los miembros de carga externa del sistema de ecuaciones canónicas:

$$\Delta_{1P}=\sum\int_L\frac{M_1M_P}{EI}dx=\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.60.8.\frac{1}{2}+\frac{8}{6.4EI}(0+4.36.1-120.1)-\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.120.8.\frac{2}{3}.1=-\frac{192}{EI}$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int_L\frac{M_2M_P}{EI}dx=\frac{8}{6.4EI}\left(0+4.\frac{1}{2}.36-120.1\right)-\frac{1}{EI}.1.3.97,5=-\frac{308,5}{EI}$$

$$\Delta_{3P}=\sum\int_L\frac{M_3M_P}{EI}dx=\frac{8}{6.4EI}\left(0-4.\frac{1}{2}.36+120.1\right)+\frac{1}{EI}.1.3.97,5+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.75.5.\frac{2}{3}.1=\frac{433,5}{EI}$$

Comprobación: $\Delta_{1P}+\Delta_{2P}+\Delta_{3P}=\Delta_{\Sigma P}$

$$\Delta_{1P}+\Delta_{2P}+\Delta_{3P}=-\frac{192}{EI}-\frac{308,5}{EI}+\frac{433,5}{EI}=-\frac{67,0}{EI}$$

$$\Delta_{\Sigma P}=\sum\int_L\frac{M_\Sigma M_P}{EI}dx=\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.60.8.\frac{1}{2}+\frac{8}{6.4EI}(0+4.36.1-120.1)-$$

$$-\frac{3}{6EI}\left(120.1+4.97,5.\frac{13}{16}+75.\frac{5}{8}\right)+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.75.5.\frac{2}{3}.\frac{3}{8}=-\frac{67,0}{EI}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones canónicas tiene la forma:

$$\frac{7,333}{EI}.x_1+\frac{3,438}{EI}.x_2-\frac{4,479}{EI}.x_3-\frac{192,0}{EI}=0$$

$$\frac{3,438}{EI}.x_1+\frac{4,667}{EI}.x_2-\frac{3,167}{EI}.x_3-\frac{308,5}{EI}=0$$

$$-\frac{4,479}{EI}.x_1-\frac{3,167}{EI}.x_2+\frac{8,0}{EI}.x_3+\frac{433,5}{EI}=0$$

Resolviendo las ecuaciones canónicas, se obtienen los siguientes resultados:

$$x_1=-29,27$$

$$x_2=54,38$$

$$x_3=-49,05$$

Comprobamos los resultados obtenidos, reemplazándolos en las ecuaciones canónicas:

PRIMERA ECUACION:

$$7,333.(-29,27)+3,438.54,38-4,479.(-49,05)-192=406,653-406,637=0,016\approx 0$$

SEGUNDA ECUACION:

$$3,438.(-29,27)+4,667.54,38-3,167.(-49,05)-308,5=409,133-409,130=0,003\approx 0$$

TERCERA ECUACION:

$$-4,479.(-29,27)-3,167.54,38+8,0.(-49,05)+433,5=564,600-564,621=-0,021\approx 0$$

Una vez calculadas las incógnitas, graficamos el diagrama final de momento flector (figura 3.14), utilizando la fórmula 3.5, es decir:

$$M = M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + M_P$$

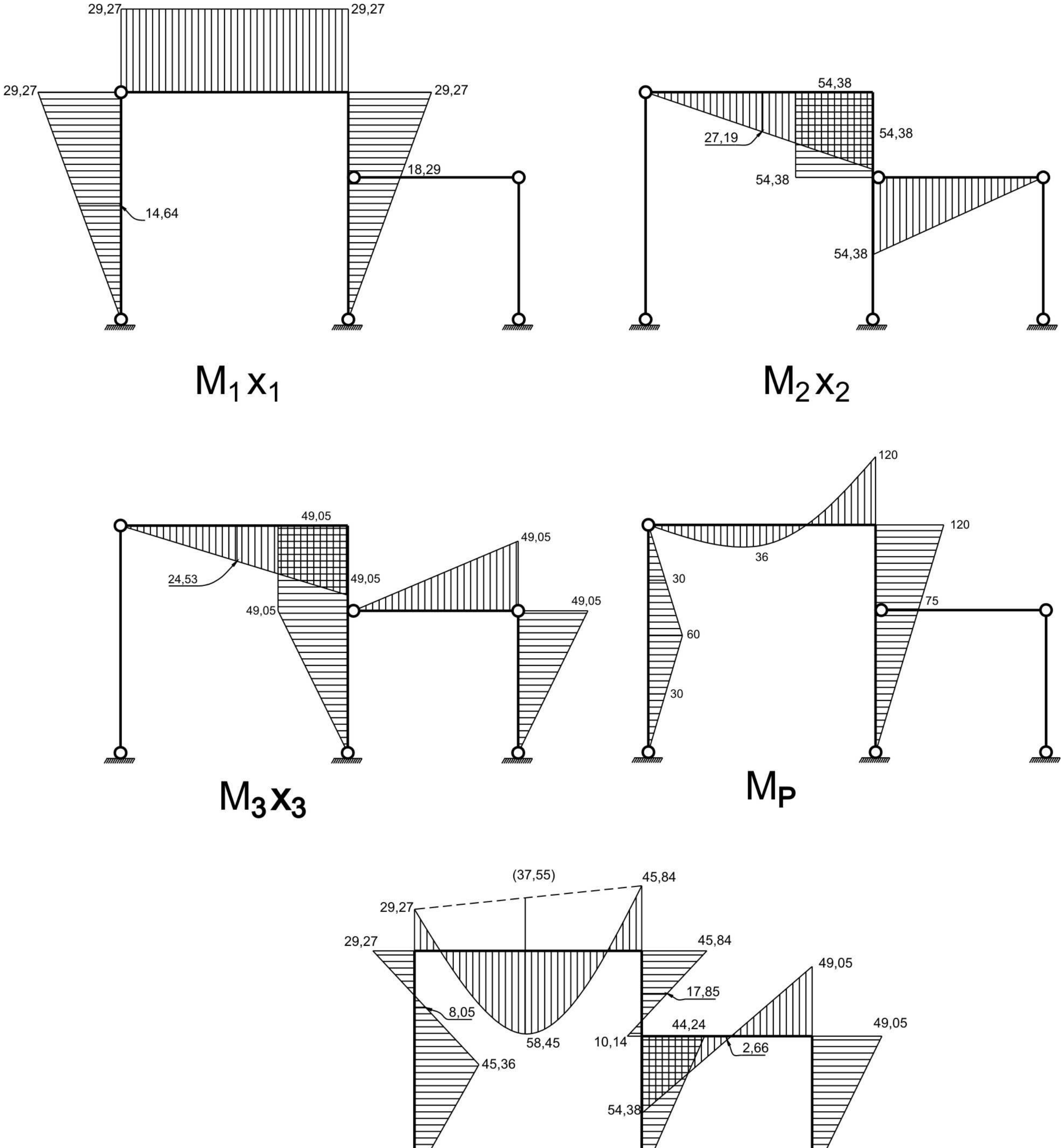


Fig. 3.14

Como se puede apreciar, el diagrama final se grafica en el esquema inicial del pórtico hiperestático y su unidad de medida es kN.m.

Después de haber graficado el diagrama M, se realizan las comprobaciones estática y cinemática.

La comprobación estática (condiciones de equilibrio de los nudos del pórtico) se muestra en la figura 3.15.

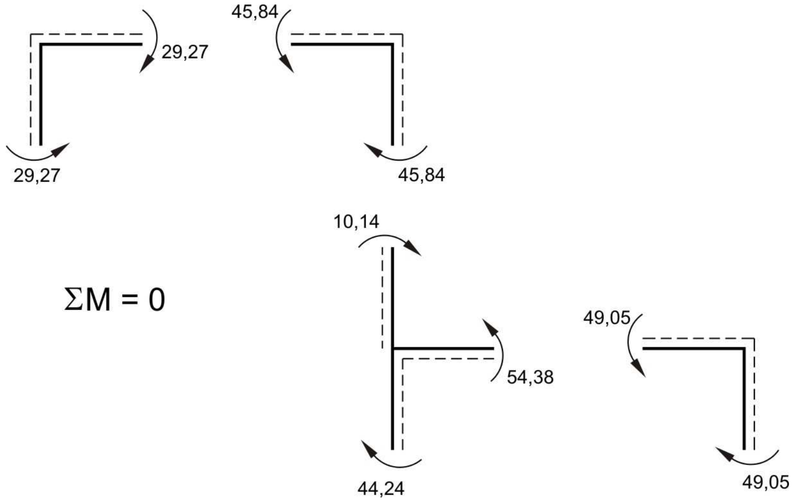


Fig. 3.15

Para la comprobación cinemática encontramos los desplazamientos de los nudos 5 y 7 del pórtico (figura 3.10), utilizando, para ello, la tercera variante del sistema principal (figura 3.11,c).

Los correspondientes diagramas unitarios se muestran en la figura 3.16,a,b.

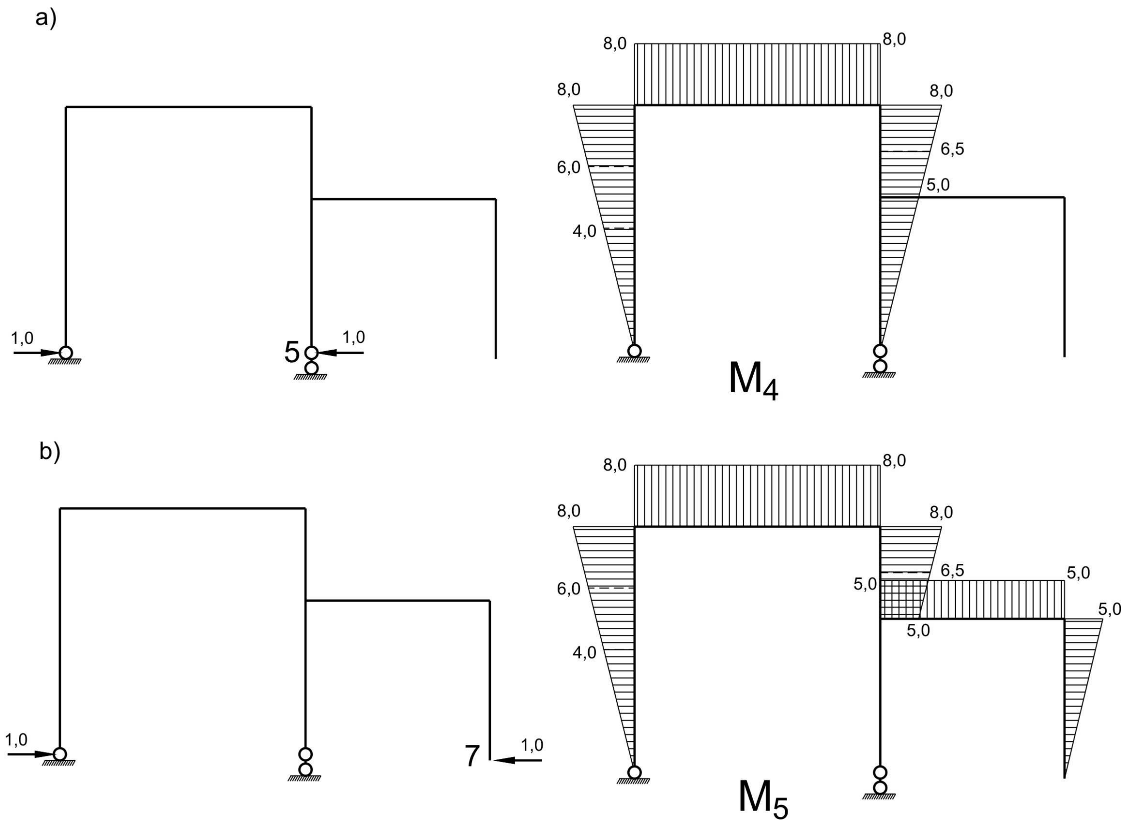


Fig. 3.16

Los desplazamientos reales lo calculamos por la fórmula 3.8:

$$\Delta_4 = \sum \int_L \frac{M_4 M}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} .45{,}36.4.\frac{2}{3}.4 + \frac{4}{6EI}\left(-45{,}36.4 - 4.8{,}05.6 + 29{,}27.8\right) +$$

$$+\frac{8}{6.4EI}\left(29{,}27.8 - 4.58{,}45.8 + 45{,}84.8\right) + \frac{3}{6EI}\left(45{,}84.8 + 4.17{,}85.6{,}5 - 10{,}14.5\right) +$$

$$+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.44{,}24.5.\frac{2}{3}.5=\frac{1}{EI}(758{,}727-758{,}746)=-\frac{0{,}019}{EI}$$

Error porcentual: $\varepsilon=\frac{0{,}019.100\%}{758{,}746}=0{,}003\%$

$$\Delta_5=\sum\int_L\frac{M_5M}{EI}dx=-\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.45{,}36.4.\frac{2}{3}.4+\frac{4}{6EI}(-45{,}36.4-4.8{,}05.6+29{,}27.8)+$$

$$+\frac{8}{6.4EI}(29{,}27.8-4.58{,}45.8+45{,}84.8)+\frac{3}{6EI}(45{,}84.8+4.17{,}85.6{,}5-10{,}14.5)-$$

$$-\frac{1}{2EI}.5.6.2{,}66+\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.49{,}05.5.\frac{2}{3}.5=\frac{1}{EI}(798{,}810-798{,}646)=\frac{0{,}164}{EI}$$

Error porcentual: $\varepsilon=\frac{0{,}164.100\%}{798{,}810}=0{,}021\%$

Para graficar el diagrama final de fuerza cortante, se utiliza la dependencia diferencial de la fórmula 3.6, es decir:

$$V_{(X)}=\frac{dM_{(X)}}{dx}$$

La derivada también puede ser calculada como la tangente del ángulo de inclinación que forma con el gráfico de la función de momentos.

En los tramos con diagramas lineales de momentos, su valor es constante.

$$V_{12}=\frac{45{,}36}{4}=11{,}34kN$$

$$V_{21}=-\frac{29{,}27+45{,}36}{4}=-18{,}66kN$$

$$V_{34}=V_{43}=\frac{45{,}84+10{,}14}{3}=18{,}66kN$$

$$V_{45}=V_{54}=\frac{44{,}24}{5}=8{,}85kN$$

$$V_{46}=V_{64}=-\frac{54{,}38+49{,}05}{6}=-17{,}24kN$$

$$V_{67}=V_{76}=\frac{49{,}05}{5}=9{,}81kN$$

En la fuerza cortante si el signo es "+" indica que el ángulo de giro del diagrama de momento es positivo (el ángulo de giro que forma el eje con el diagrama está orientado en sentido horario) y es "-", si el ángulo de giro es negativo (el ángulo de giro está orientado en sentido antihorario).

En los tramos donde existen diagramas curvos de momento flector, se determina el valor de V por los extremos del tramo. Para ello, se puede analizar el equilibrio del tramo indicado del pórtico, bajo la acción de la carga externa y las fuerzas en los extremos.

Por ejemplo, analizamos el tramo 2-3, que se muestra en la figura 3.17.

$$\sum M_2 = 0 ; \qquad V_{32}.8 + 12.8.4 + 45,84 - 29,27 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{32} = -50,07kN \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 ; \qquad V_{23} + 50,07 - 12.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{23} = 45,93kN \uparrow$$

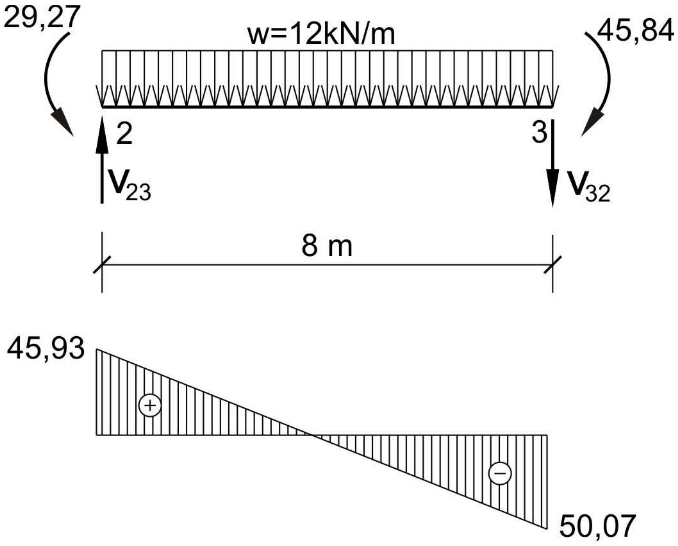


Fig. 3.17

Por los valores encontrados, graficamos el diagrama final de fuerza cortante, que se muestra en la figura 3.18.

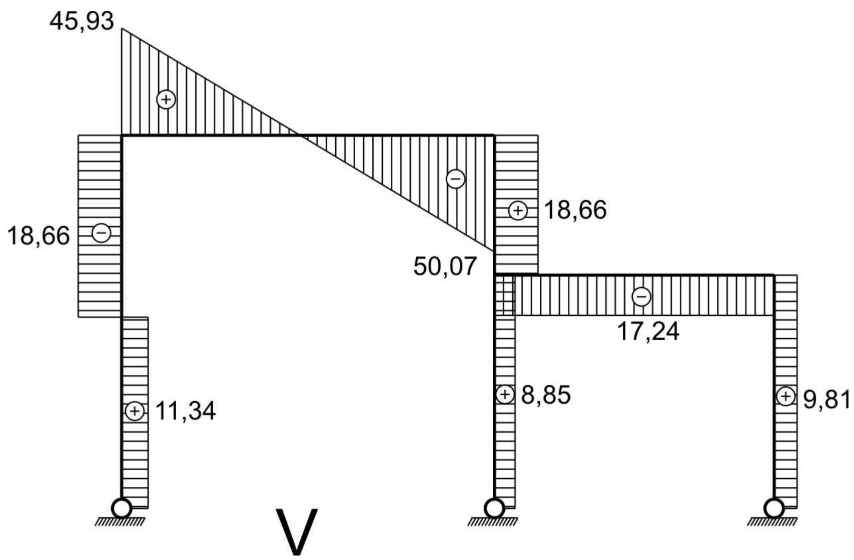


Fig. 3.18

El diagrama final de fuerza axial o normal se determina a partir de las condiciones de equilibrio en los nudos del pórtico (figura 3.19).

NUDO 2:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} = -18,66kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{21} = -45,93kN$$

NUDO 3:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{32} = -18,66kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{34} = -50,07kN$$

NUDO 4:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{46} = -9{,}81 kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{45} = -32{,}83 kN$$

NUDO 6:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{64} = -9{,}81 kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{67} = -17{,}24 kN$$

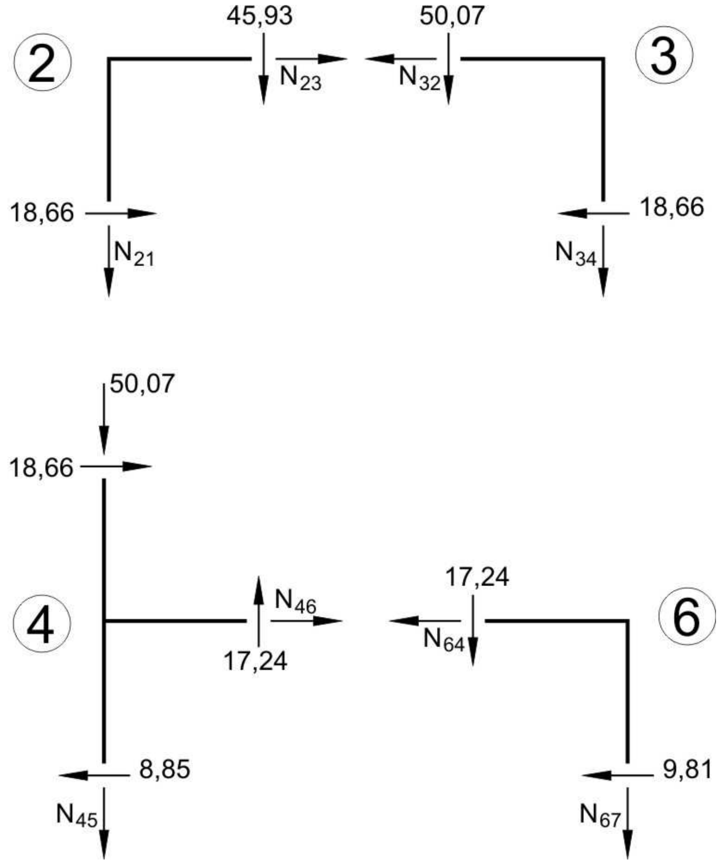


Fig. 3.19

De esta manera, podemos graficar el diagrama final de fuerza axial o normal, que se muestra en la figura 3.20.

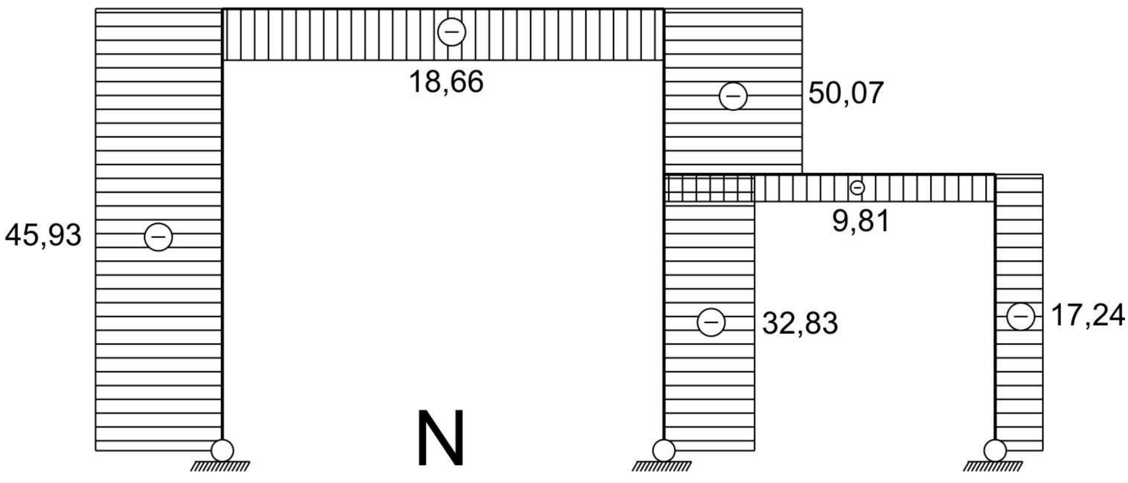


Fig. 3.20

Finalmente, realizamos la comprobación general de equilibrio del pórtico (figura 3.21):

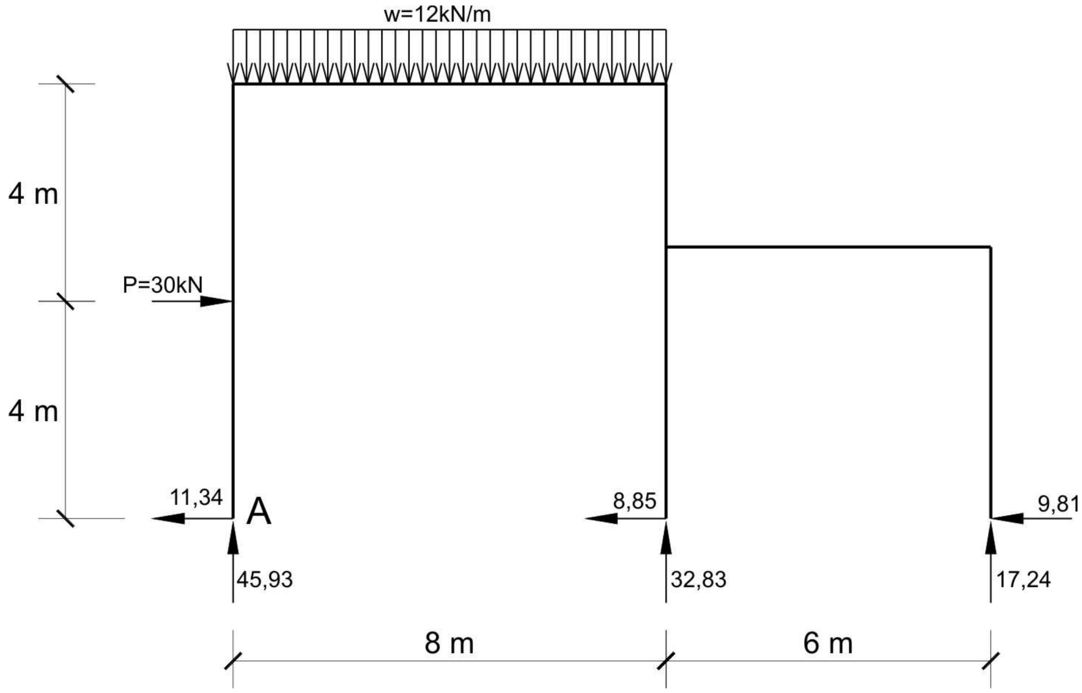


Fig. 3.21

$\sum F_X = 0$; $30 - 11{,}34 - 8{,}85 - 9{,}81 = 30 - 30 = 0$

$\sum F_Y = 0$; $45{,}93 + 32{,}83 + 17{,}24 - 12.8 = 96 - 96 = 0$

$\sum M_A = 0$; $-12.8.4 - 30.4 + 32{,}83.8 + 17{,}24.14 = 504 - 504 = 0$

Como se puede ver, la comprobación de resultados fue exitosa.

EJEMPLO 6. Para el pórtico simétrico e hiperestático, mostrado en la figura 3.22,a grafique los diagramas M, V y N.

En un inicio calculamos el grado de indeterminación del pórtico, el cual tiene tres contornos cerrados y cuatro articulaciones o rótulas simples.

$$G.I. = 3.3 - 4 = 5$$

En consecuencia, el pórtico es cinco veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

Utilizando la simetría del pórtico, elegimos un sistema principal simétrico, colocando cinco rótulas simétricas y agrupando las incógnitas, tal como se muestra en la figura 3.22,b. Como la carga es antisimétrica, entonces las incógnitas simétricas serán iguales a cero $(x_3 = x_4 = x_5 = 0)$ y no se considerarán en el cálculo.

Escribimos en forma general el sistema de ecuaciones canónicas para las incógnitas antisimétricas x_1 y x_2:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Cada una de estas ecuaciones expresa la igualdad a cero del ángulo de giro de los ejes en las secciones complejas en los lugares donde se colocaron las rótulas en las direcciones correspondientes al grupo de incógnitas.

Para el sistema principal elegido, calculamos las reacciones en los apoyos y graficamos los diagramas de momento flector para los estados de carga unitario y externo, los que se muestran en la figura 3.22.

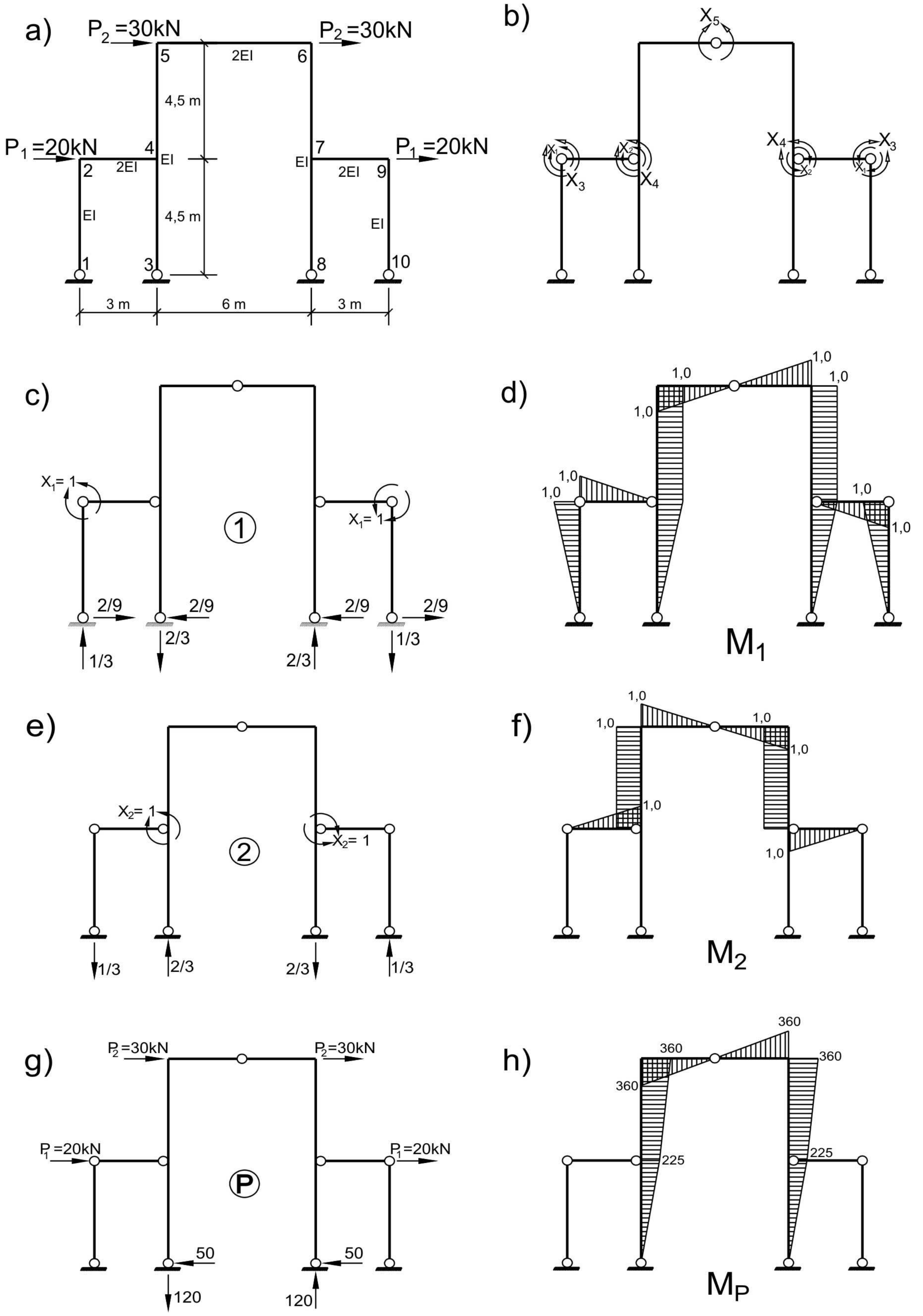


Fig. 3.22

Calculamos los coeficientes $\delta_{ik}\,(i,k=1,2)$ de las incógnitas y los miembros libres $\Delta_{iP}\,(i=1,2)$ del sistema de ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}=\sum\int_L \frac{M_1M_1}{EI}dx=2\left[\frac{1}{EI}.\frac{1.4,5}{2}.\frac{2}{3}.1.2+\frac{1}{2EI}.\frac{1.3}{2}.\frac{2}{3}.1.2+\frac{1}{EI}.1.4,5.1\right]=\frac{17}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int_L \frac{M_1M_2}{EI}dx=2\left[\frac{1}{2EI}.\frac{1.3}{2}.\frac{1}{3}.1-\frac{1}{EI}.1.4,5.1-\frac{1}{2EI}.\frac{1.3}{2}.\frac{2}{3}.1\right]=-\frac{9,5}{EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int_L \frac{M_2M_2}{EI}dx=2\left[\frac{1}{2EI}.\frac{1.3}{2}.\frac{2}{3}.1.2+\frac{1}{EI}.1.4,5.1\right]=\frac{11}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int_L \frac{M_1M_P}{EI}dx=2\left[\frac{1}{EI}.\frac{225.4,5}{2}.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{EI}.\frac{360+225}{2}.4,5.1+\frac{1}{2EI}.\frac{360.3}{2}.\frac{2}{3}.1\right]=\frac{3667,5}{EI}$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int_L \frac{M_2M_P}{EI}dx=2\left[-\frac{1}{EI}.\frac{360+225}{2}.4,5.1-\frac{1}{2EI}.\frac{360.3}{2}.\frac{2}{3}.1\right]=-\frac{2992,5}{EI}$$

Ahora multiplicamos todos los coeficientes y miembros libres por EI y los reemplazamos en las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$17x_1-9,5x_2+3667,5=0$$

$$-9,5x_1+11x_2-2992,5=0$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones, obteniendo los siguientes resultados:

$$x_1=-123,140\text{kN.m}$$

$$x_2=165,697\text{kN.m}$$

Para obtener el diagrama final de momento flector M (figura 3.23), utilizamos la siguiente fórmula:

$$M=M_1x_1+M_2x_2+M_P$$

Ahora graficamos el diagrama final de fuerza cortante V, el cual se puede obtener a partir del diagrama M. Las fuerzas cortantes de los diversos elementos del pórtico serán:

$$V_{12}=V_{21}=\frac{123,140}{4,5}=27,364\text{kN}$$

$$V_{34}=V_{43}=\frac{101,860}{4,5}=22,636\text{kN}$$

$$V_{24}=V_{42}=-\frac{165,697+123,140}{3}=-96,279\text{kN}$$

$$V_{45}=V_{54}=\frac{71,163+63,837}{4,5}=30\text{kN}$$

$$V_{56}=V_{65}=-\frac{71,163+71,163}{6}=-23,721\text{kN}$$

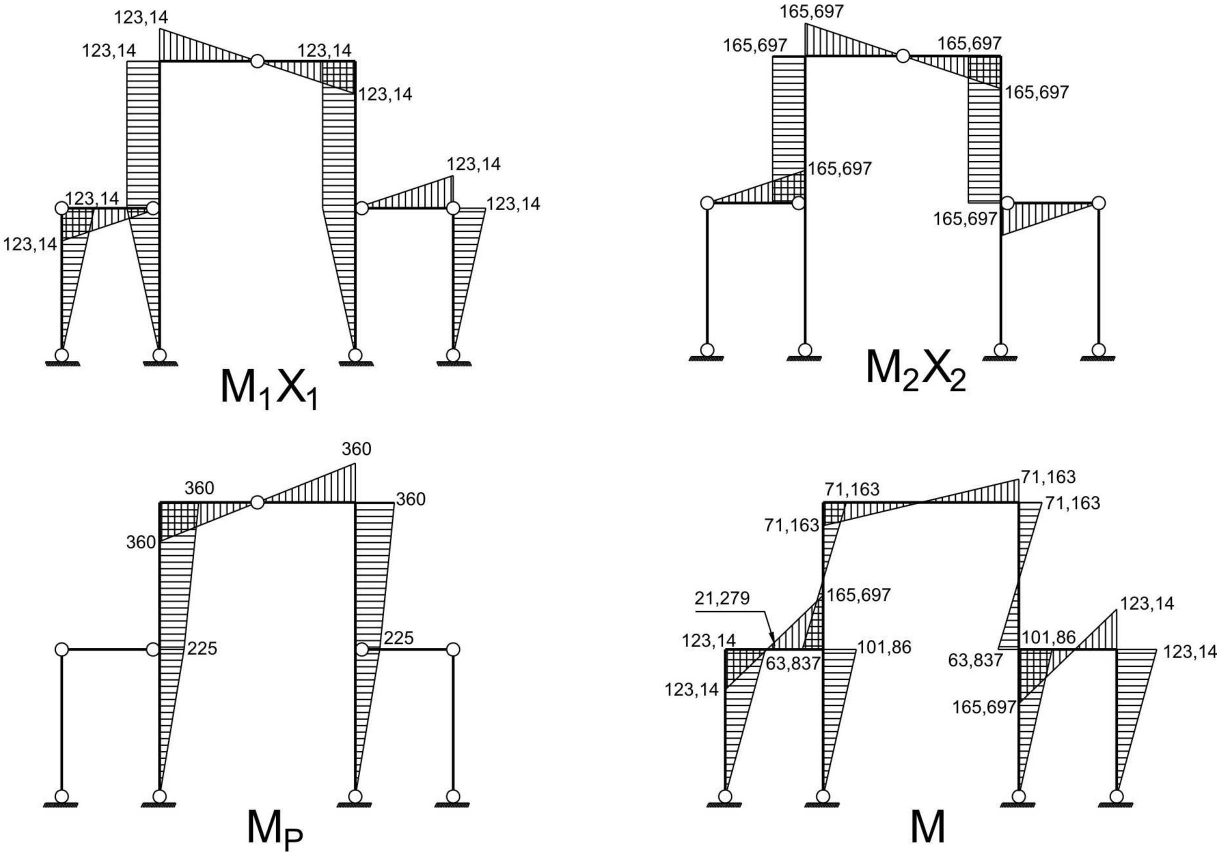


Fig. 3.23

Por los resultados obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante final V (figura 3.24,a). Cuando la carga es antisimétrica, el diagrama V será simétrico.

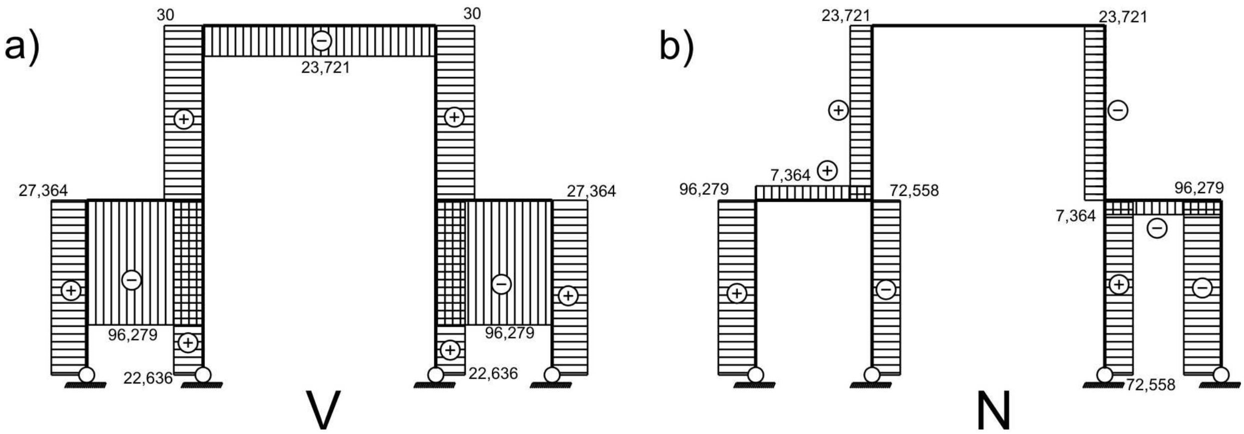


Fig. 3.24

Para graficar el diagrama final N, determinamos los valores de las fuerzas axiales en todos los elementos del pórtico a la izquierda del eje de simetría y a partir de las condiciones de equilibrio de nudos (figura 3.25). El diagrama N será antisimétrico, cuando las cargas son también antisimétricas.

NUDO 2:

$$\sum F_X = 0; \qquad 20 - 27{,}364 + N_{24} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{24} = N_{42} = 7{,}364\,kN$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad -N_{21} + 96{,}279 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{21} = N_{12} = 96{,}279\,kN$$

NUDO 5:

$$\sum F_X = 0; \qquad 30 - 30 - N_{56} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{56} = N_{65} = 0$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad -N_{54} + 23{,}721 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{54} = N_{45} = 23{,}721\text{kN}$$

NUDO 4:

$$\sum F_X = 0; \qquad 30 - 7{,}364 - 22{,}636 = 0$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad 23{,}721 - 96{,}279 - N_{43} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{43} = N_{34} = -72{,}558\text{kN}$$

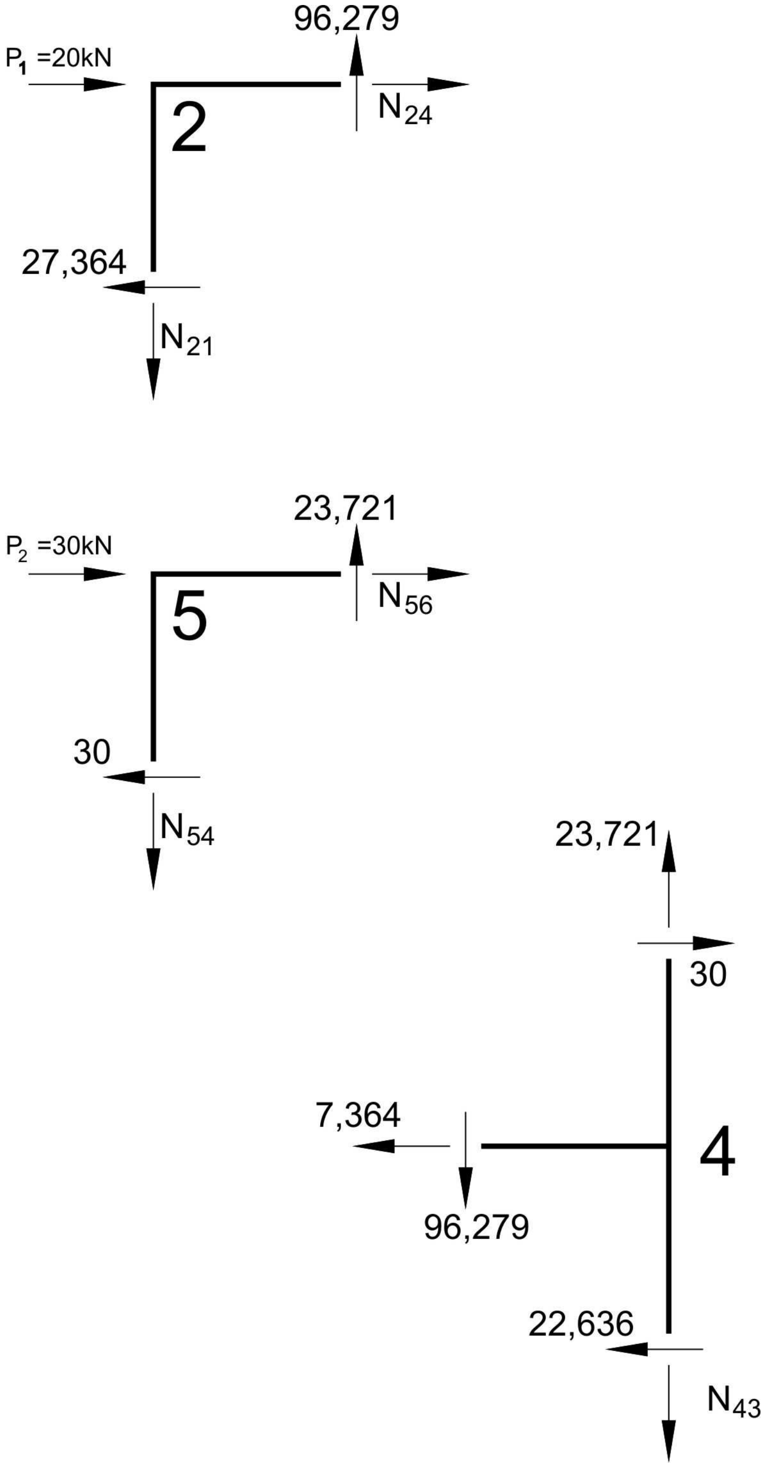


Fig. 3.25

En base a los resultados obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal N, que se muestra en la figura 3.24,b.

A través de los diagramas V y N, determinamos las reacciones en los apoyos y comprobamos el equilibrio de todo el pórtico (figura 3.26).

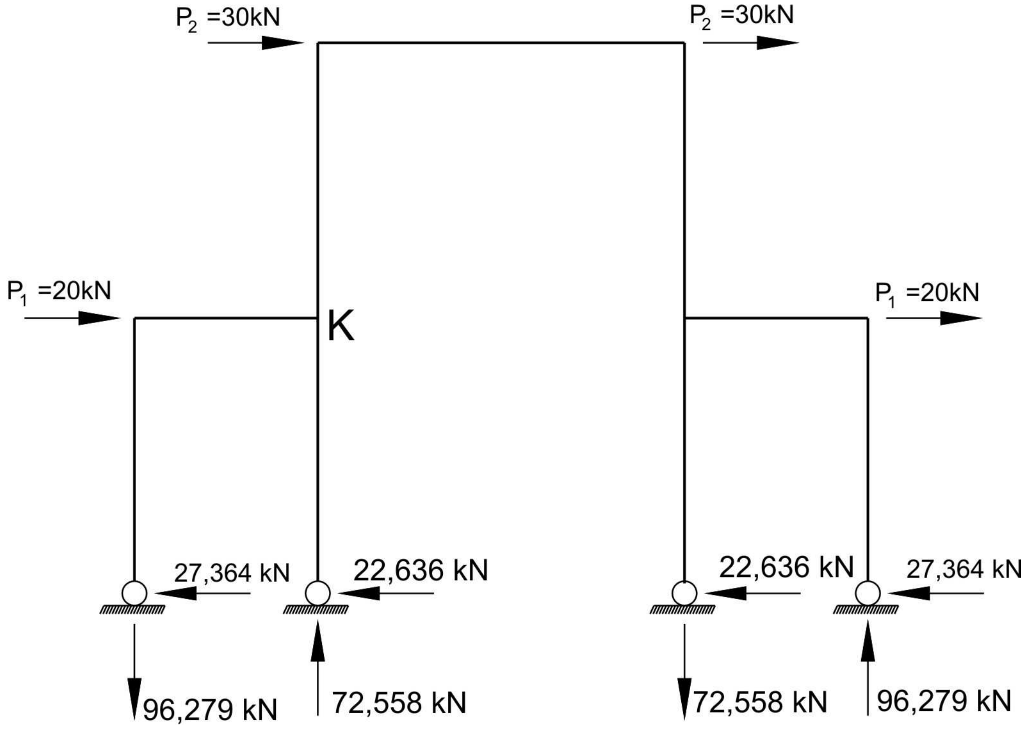


Fig. 3.26

$\sum F_X = 0$; $\quad 2(30+20) - 2(27{,}364 + 22{,}636) = 100 - 100 = 0$

$\sum M_K = 0$; $\quad 2.30.4{,}5 + 2.27{,}364.4{,}5 + 2.22{,}636.4{,}5 - 96{,}279.3 + 72{,}558.6 - 96{,}279.9 = 0$

$1155{,}348 - 1155{,}348 = 0$

Como se puede observar, la comprobación de resultados fue exitosa.

EJEMPLO 7. Graficar el diagrama de momento flector M para el pórtico hiperestático de la figura 3.27, debido al asentamiento y desplazamiento de uno de sus apoyos. La sección transversal de las columnas es $a = 0{,}3m$ y $b = 0{,}4m$; el módulo de elasticidad del material $E = 2.10^7 kPa$ y la rigidez $EI = 32.10^3 kN.m^2$.

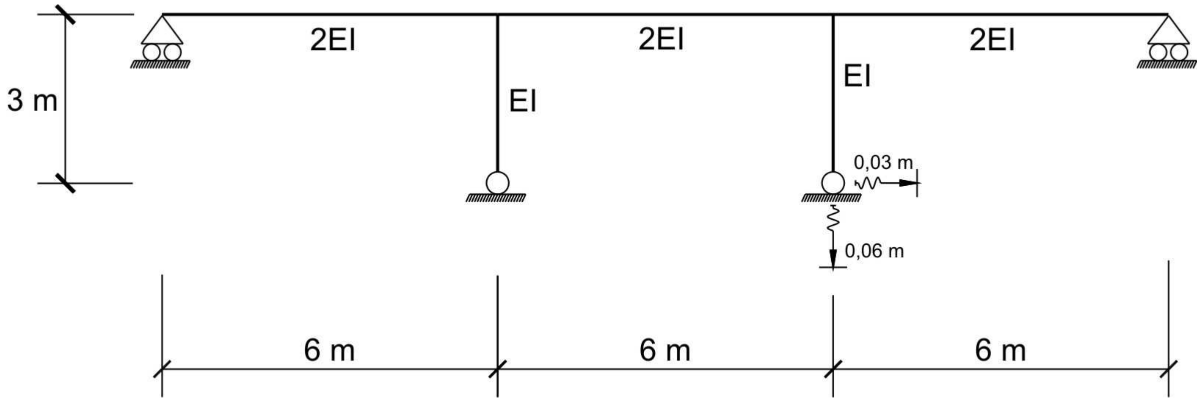


Fig. 3.27

Analizamos el grado de indeterminación del pórtico, el cual tiene tres contornos cerrados y seis rótulas simples. En consecuencia, el grado de indeterminación será:

$$G.I. = 3.3 - 6 = 3$$

El pórtico es tres veces estáticamente indeterminado o hiperestático.

Utilizamos la simetría del pórtico dado, eligiendo un sistema principal simétrico, colocando tres rótulas simétricas y agrupando las incógnitas, tal como se muestra el la figura 3.28. Para el sistema principal se determinan las reacciones en los apoyos y se grafican los diagramas de momento flector para cada uno de los estados de carga unitario.

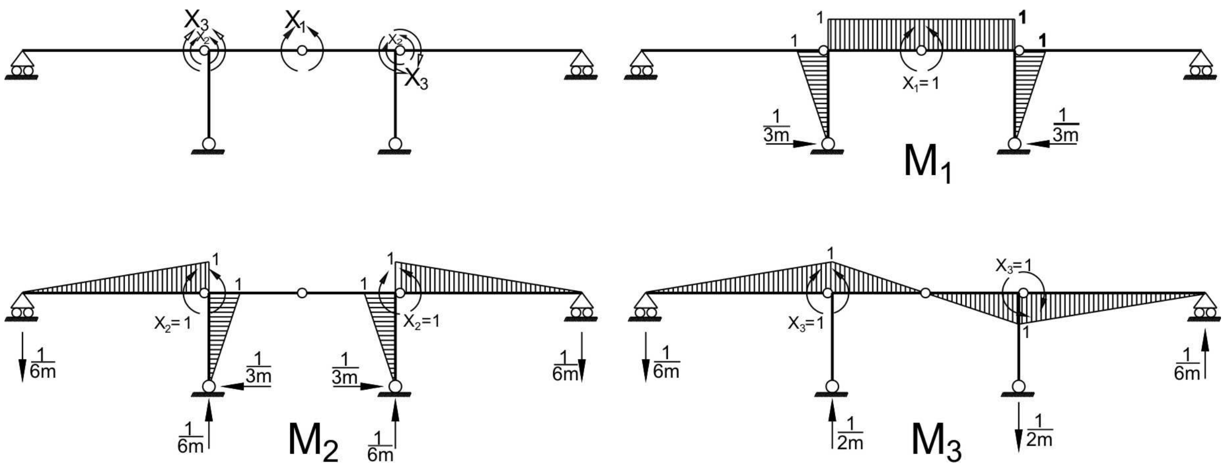


Fig. 3.28

Considerando que $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ y $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$, el sistema de ecuaciones canónicas tiene la siguiente forma:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1C} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2C} = 0$$

$$\delta_{33}x_3 + \Delta_{3C} = 0$$

Calculamos los coeficientes $\delta_{ik}\,(i,k = 1,2)$, δ_{33} y los miembros libres $\Delta_{iC}\,(i = 1,2,3)$ del sistema de ecuaciones, utilizando las fórmulas 3.4 y 3.10:

$$\delta_{11} = \sum\int_L \frac{M_1M_1}{EI}dx = 2.\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.3.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2EI}.1.6.1 = \frac{5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum\int_L \frac{M_1M_2}{EI}dx = -2.\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.3.\frac{2}{3}.1 = -\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum\int_L \frac{M_2M_2}{EI}dx = 2\left[\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.3.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{2}{3}.1\right] = \frac{4}{EI}$$

$$\delta_{33} = \sum\int_L \frac{M_3M_3}{EI}dx = 2\left[\frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.1.3.\frac{2}{3}.1\right] = \frac{3}{EI}$$

$$\Delta_{1C} = -\sum R_{1j}.C_j = -\left(-\frac{1}{3}.0,03\right) = 0,01$$

$$\Delta_{2C} = -\sum R_{2j}.C_j = -\left(\frac{1}{3}.0,03 - \frac{1}{6}.0,06\right) = 0$$

$$\Delta_{3C} = -\sum R_{3j}.C_j = -\left(\frac{1}{2}.0,06\right) = -0,03$$

Multiplicando todos los coeficientes por $EI = 32.10^3 kN.m^2$ y reemplazando sus valores en las ecuaciones, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x_1 - 2x_2 + 320 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$3x_3 - 960 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos el siguiente resultado:

$$x_1 = -80kN.m$$

$$x_2 = -40kN.m$$

$$x_3 = 320kN.m$$

Ahora graficamos el diagrama final M (figura 3.29), debido al asentamiento y desplazamiento de uno de los apoyos, aplicando la siguiente fórmula:

$$M = M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 = -80M_1 - 40M_2 + 320M_3$$

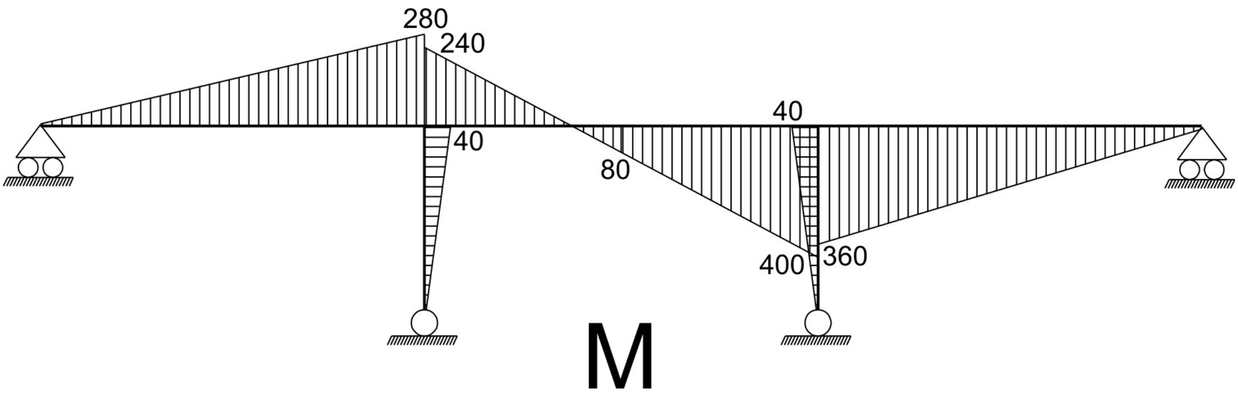


Fig. 3.29

EJEMPLO 8. Graficar los diagramas M, V y N para el pórtico hiperestático de la figura 3.30, el cual está sometido al efecto de variación de temperatura, siendo las dimensiones de su sección transversal $a = 0,2m$ y $b = 0,4m$ en todos los elementos del pórtico; su módulo de elasticidad del material $E = 2.10^7 kPa$ y su coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 1,2.10^{-5}\left(\frac{1}{^0C}\right)$. Asimismo, grafique el diagrama de esfuerzos normales σ en la sección más cargada del pórtico.

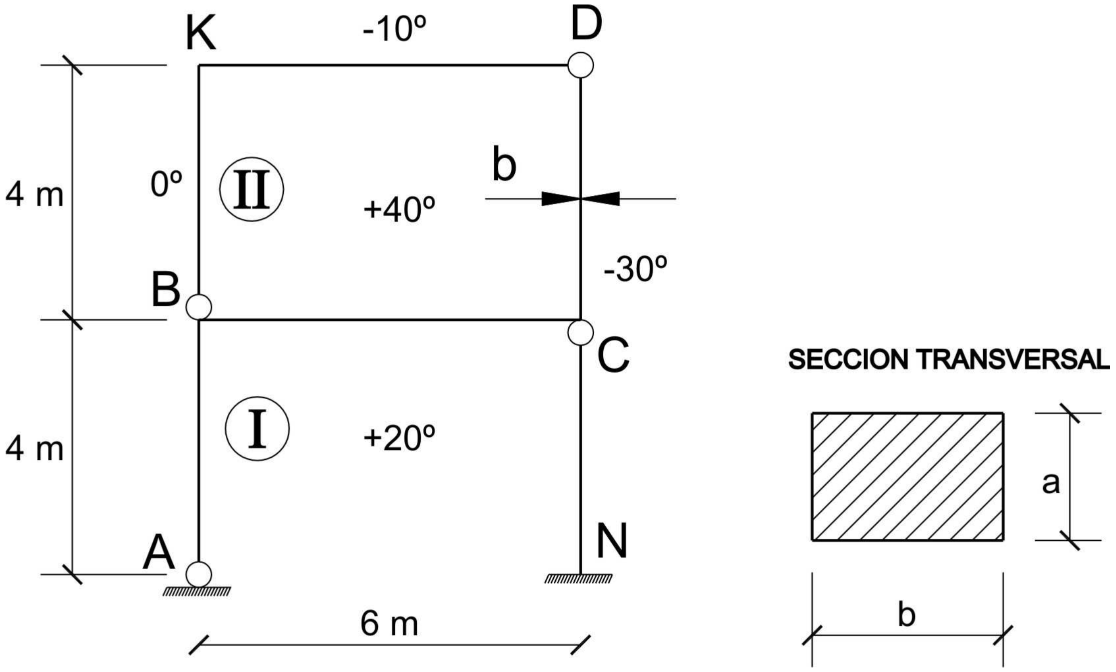


Fig. 3.30

Analizamos el grado de indeterminación del sistema:

$$G.I. = 3.2 - 4 = 2$$

Elegimos el sistema principal, colocando rótulas en el nudo K y el apoyo N (figura 3.31), los cuales absorben el momento flector en dichos puntos.

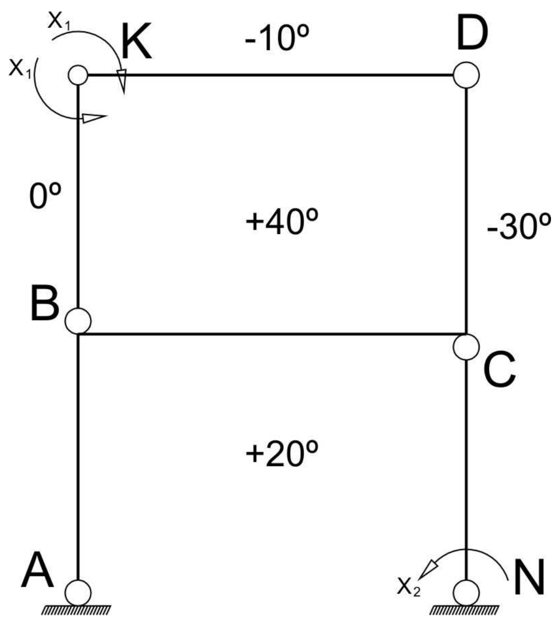


Fig. 3.31

De esta manera, el sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1T} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2T} = 0$$

Para calcular los coeficientes $\delta_{ik}\,(i = 1,2; k = 1,2)$ y los miembros libres Δ_{iT}, graficamos los diagramas unitarios de momento flector y fuerza axial o normal (figura 3.32).

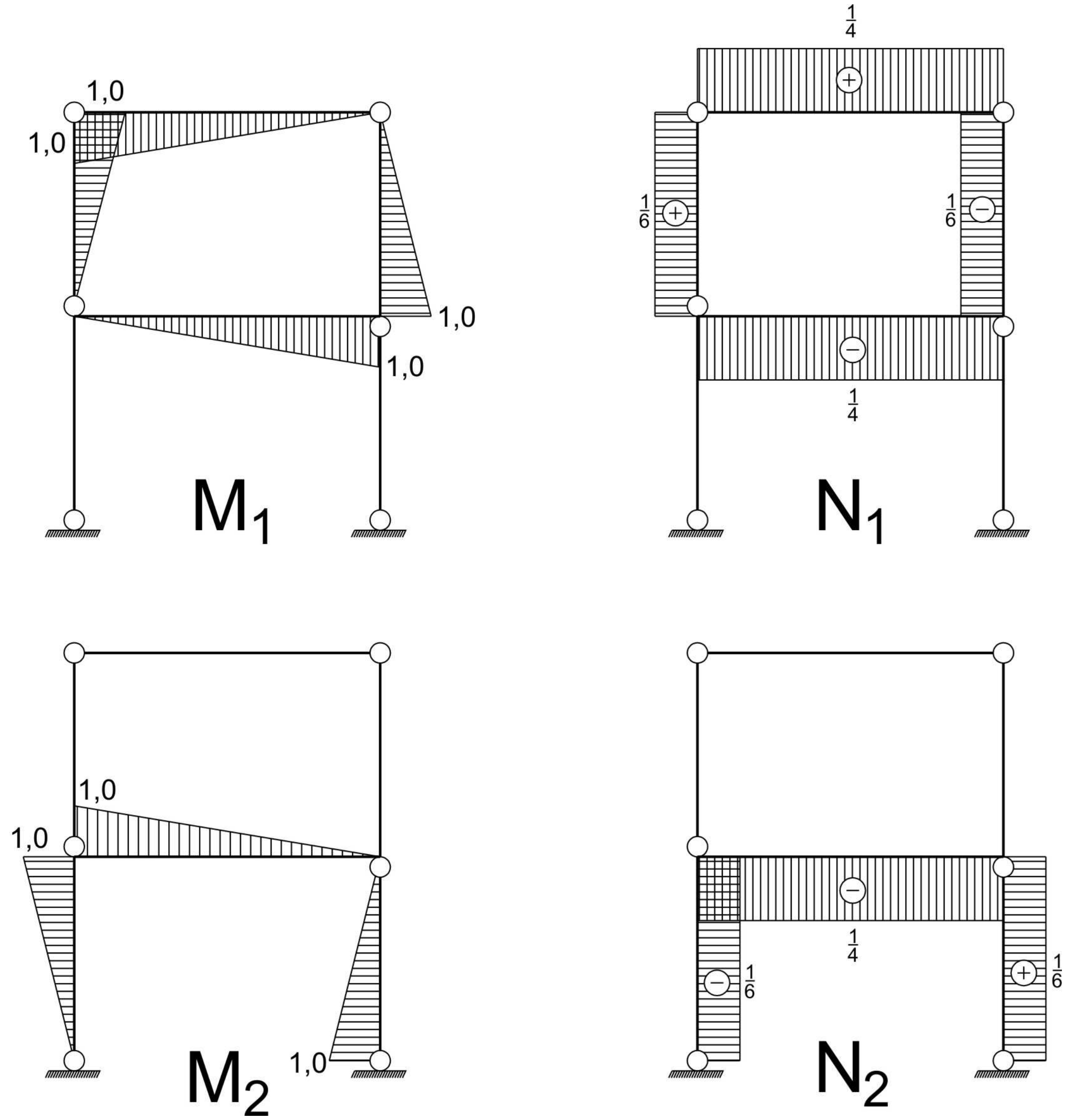


Fig. 3.32

Calculamos los coeficientes δ_{11}, $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} y los miembros libres Δ_{1T}, Δ_{2T} del sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, utilizando las fórmulas 3.4 y 3.9.

$$\delta_{11} = \sum\int_L \frac{M_1M_1}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}.4.1.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.4.1.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.6.1.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.6.1.\frac{2}{3}.1\right) = \frac{20}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \sum\int_L \frac{M_2M_2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}.4.1.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.4.1.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.6.1.\frac{2}{3}.1\right) = \frac{14}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int_L \frac{M_1M_2}{EI}dx=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}.6.1.\frac{1}{3}.1\right)=-\frac{1}{EI}$$

$$\Delta_{1T}=\sum\alpha\frac{|t_1-t_2|}{b}A_{M_1}+\sum\alpha\frac{|t_1+t_2|}{2}A_{N_1}=\alpha.\frac{|40-0|}{0,4}.\frac{1}{2}.4.1-\alpha.\frac{|-30-40|}{0,4}.\frac{1}{2}.4.1+$$

$$+\alpha.\frac{|40-(-10)|}{0,4}.\frac{1}{2}.6.1-\alpha.\frac{|20-40|}{0,4}.\frac{1}{2}.6.1+\alpha.\frac{|40+0|}{2}.\frac{1}{6}.4-\alpha.\frac{|-30+40|}{2}.\frac{1}{6}.4+$$

$$+\alpha.\frac{|40-10|}{2}.\frac{1}{4}.6-\alpha.\frac{|20+40|}{2}.\frac{1}{4}.6=62,5\alpha$$

$$\Delta_{2T}=\sum\alpha\frac{|t_1-t_2|}{b}A_{M_2}+\sum\alpha\frac{|t_1+t_2|}{2}A_{N_2}=\alpha.\frac{|20-(-30)|}{0,4}.\frac{1}{2}.4.1-\alpha.\frac{|0-20|}{0,4}.\frac{1}{2}.4.1+$$

$$+\alpha.\frac{|40-20|}{0,4}.\frac{1}{2}.6.1+\alpha.\frac{|20-30|}{2}.\frac{1}{6}.4-\alpha.\frac{|0+20|}{2}.\frac{1}{6}.4-\alpha.\frac{|40+20|}{2}.\frac{1}{4}.6=251,67\alpha$$

Reemplazamos valores en las ecuaciones canónicas, quedando así:

$$\frac{20}{3EI}.x_1-\frac{1}{EI}.x_2+62,5\alpha=0$$

$$-\frac{1}{EI}.x_1+\frac{14}{3EI}.x_2+251,67\alpha=0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos los siguientes resultados:

$$x_1=-18,044\alpha EI$$

$$x_2=-57,796\alpha EI$$

Calculamos el valor de $\alpha EI=1,2.10^{-5}.2.10^7.\frac{0,2.0,4^3}{12}=0,256$ y lo reemplazamos en los resultados anteriores, obteniendo:

$$x_1=-4,619kN.m$$

$$x_2=-14,796kN.m$$

Graficamos el diagrama final de momento flector debido al efecto de variación de temperatura (figura 3.33), utilizando la fórmula:

$$M=M_1x_1+M_2x_2$$

Para graficar el diagrama final de fuerza cortante (figura 3.34), lo realizamos a través del diagrama M para cada elemento del pórtico:

$$V_{KD}=V_{DK}=\frac{0-(-4,619)}{6}=0,77kN$$

$$V_{BC}=V_{CB}=\frac{-4,619-14,796}{6}=-3,24kN$$

$$V_{BK}=V_{KB}=\frac{-4,619-0}{4}=-1,15kN$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{0-(-4,619)}{4} = 1,15kN$$

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{14,796-0}{4} = 3,70kN$$

$$V_{CN} = V_{NC} = \frac{0-14,796}{4} = -3,70kN$$

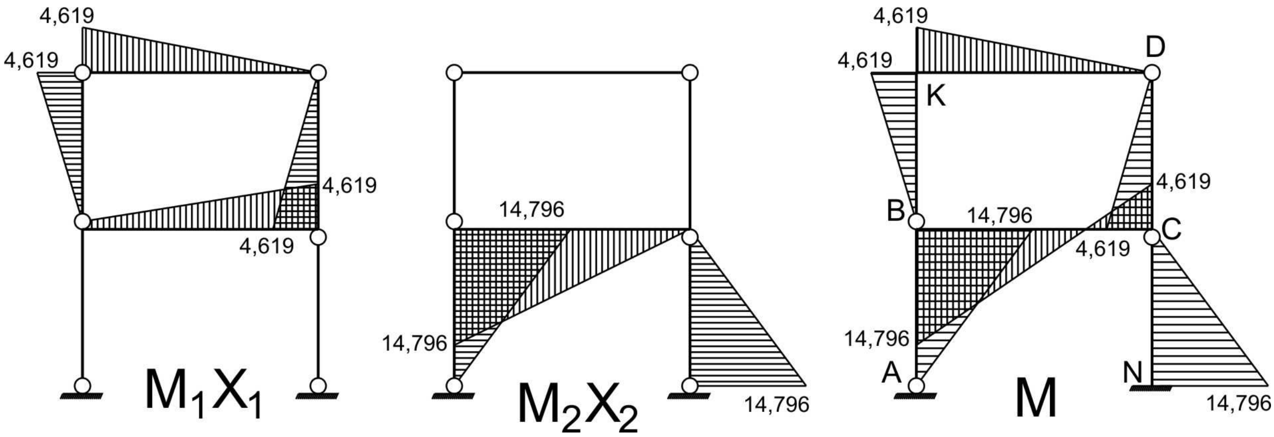


Fig. 3.33

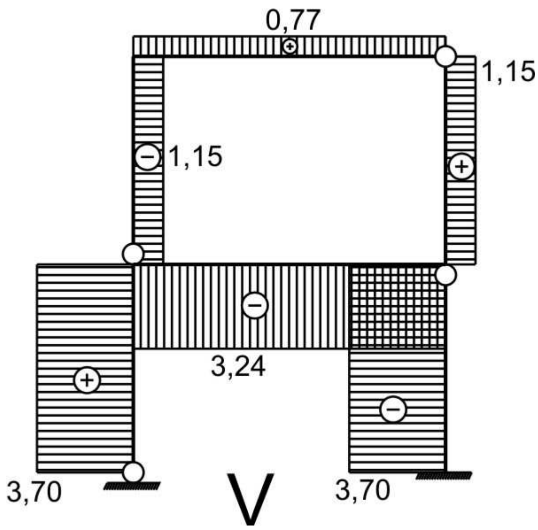


Fig. 3.34

Para graficar el diagrama final de fuerza axial o normal N, lo determinamos a partir de las condiciones de equilibrio de los nudos del pórtico (figura 3.35):

NUDO K:

$\sum F_X = 0$; $\quad N_{KD} + 1,15 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{KD} = -1,15kN$

$\sum F_Y = 0$; $\quad -N_{KB} - 0,77 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{KB} = -0,77kN$

NUDO D:

$\sum F_X = 0$; $\quad N_{DK} = N_{KD} = -1,15kN$

$\sum F_Y = 0$; $\quad -N_{DC} + 0,77 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{DC} = 0,77kN$

NUDO B:

$$\sum F_X = 0; \qquad N_{BC} - 1{,}15 - 3{,}70 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{BC} = N_{CB} = 4{,}85kN$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad -0{,}77 + 3{,}24 - N_{BA} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{BA} = 2{,}47kN$$

NUDO C:

$$\sum F_X = 0; \qquad 1{,}15 + 3{,}70 - 4{,}85 = 0$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad 0{,}77 - 3{,}24 - N_{CN} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{CN} = -2{,}47kN$$

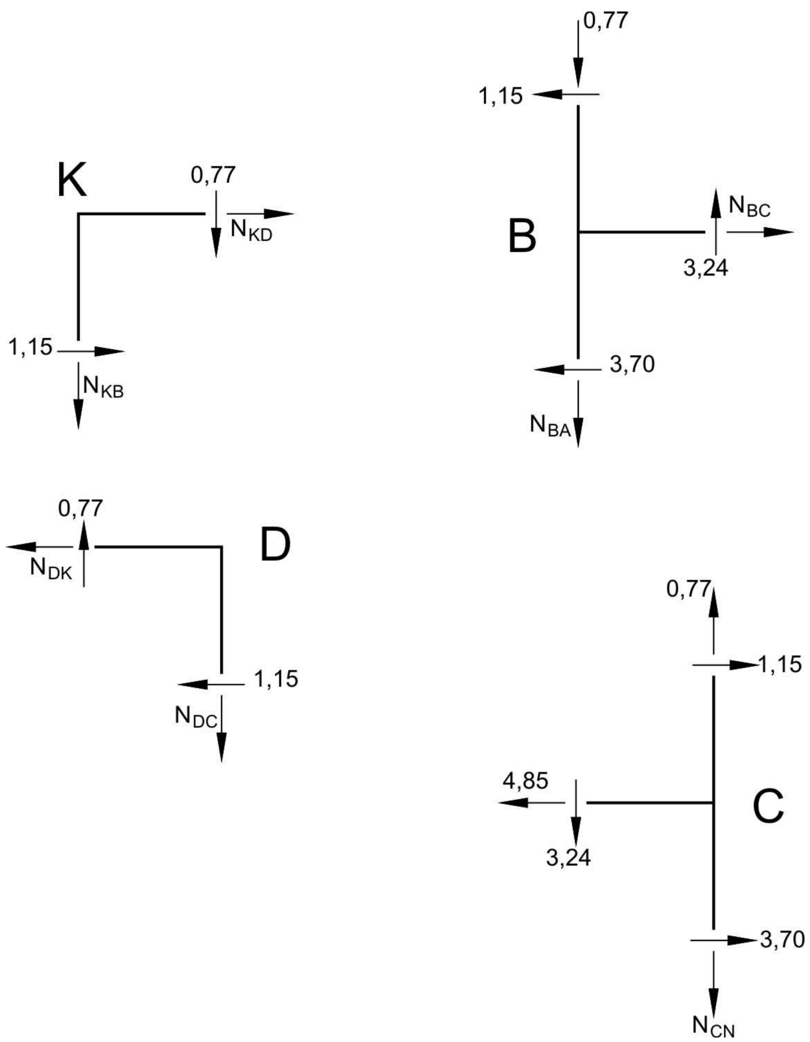


Fig. 3.35

En función de los resultados obtenidos, graficamos el diagrama final de fuerza axial o normal, el que se muestra en la figura 3.36.

A través de los diagramas M, V y N, determinamos las reacciones en los apoyos y comprobamos las condiciones de equilibrio de todo el pórtico (figura 3.37).

$$\sum F_X = 0; \qquad -3{,}70 + 3{,}70 = 0$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad -2{,}47 + 2{,}47 = 0$$

$$\sum M_A = 0; \qquad 2{,}47.6 - 14{,}796 = 14{,}82 - 14{,}796 = 0{,}024 \approx 0$$

Error porcentual: $\varepsilon = \frac{0{,}024.100\%}{14{,}82} = 0{,}16\%$

De esta manera, el pórtico está equilibrado.

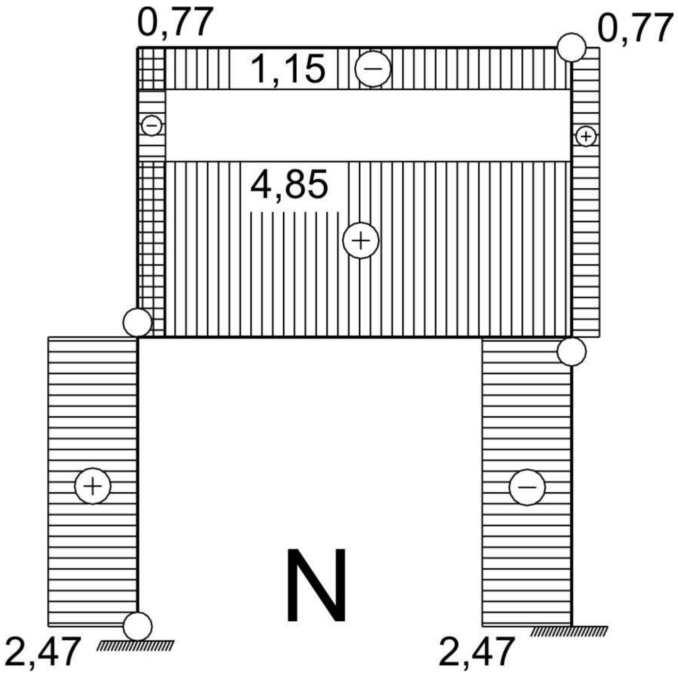


Fig. 3.36

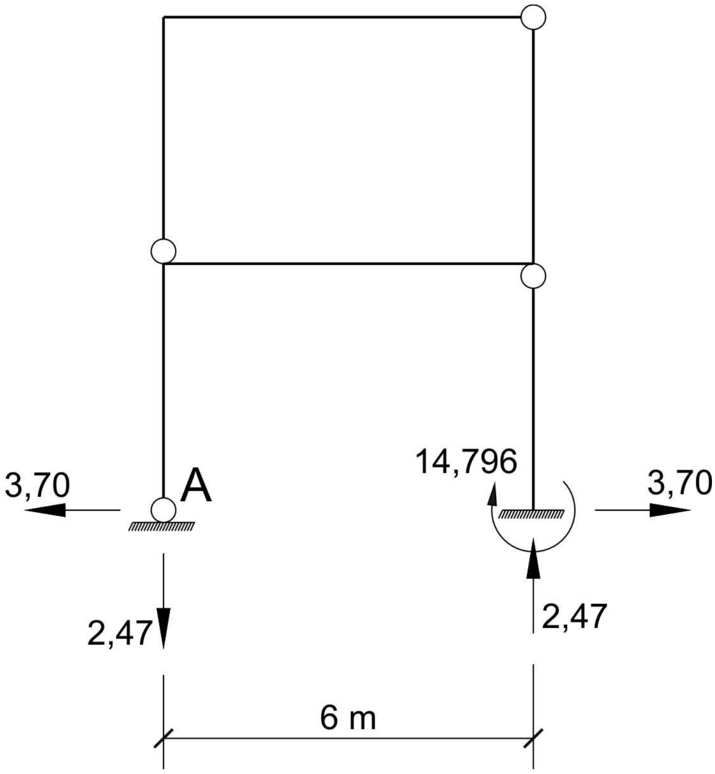


Fig. 3.37

Ahora determinamos los esfuerzos normales en la sección más cargada del pórtico, esto es, en el punto B correspondiente a la viga BC, en la cual el momento flector es igual a 14,796kN.m y la fuerza axial o normal igual a 4,85kN (figura 3.38).

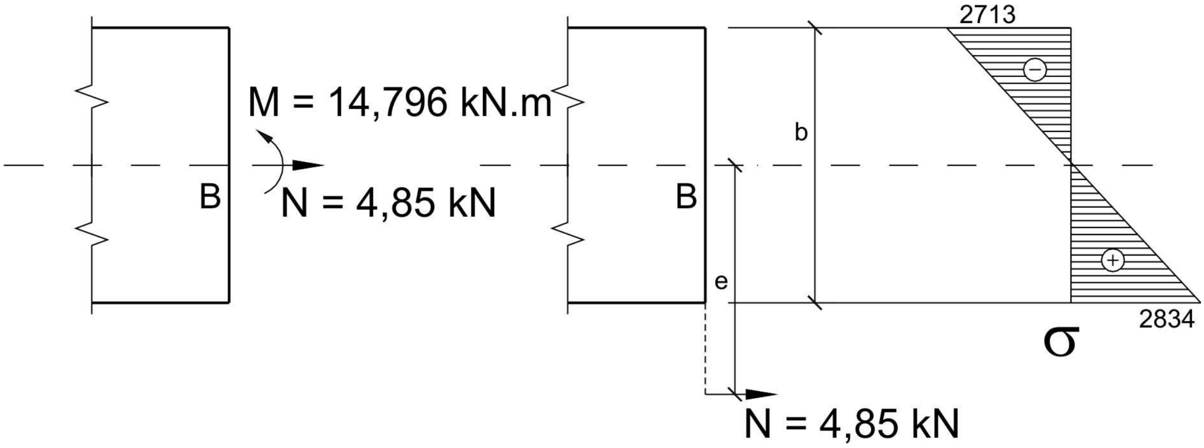


Fig. 3.38

El esfuerzo normal lo calculamos por la conocida fórmula de tracción-compresión excéntrica:

$$\sigma_{\substack{máx\\mín}} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6e}{b}\right) \tag{3.11}$$

Donde:

$A = a.b$ - área de la sección transversal de la viga;

$e = \frac{M}{N}$ - excentricidad de aplicación de la fuerza axial.

Calculamos la excentricidad de la carga:

$$e = \frac{14,796}{4,85} = 3,05m$$

Luego determinamos los esfuerzos normales máximo y mínimo:

$$\sigma_{máx} = \frac{4,85}{0,2.0,4}\left(1 + \frac{6.3,05}{0,4}\right) = 2834kPa$$

$$\sigma_{mín} = \frac{4,85}{0,2.0,4}\left(1 - \frac{6.3,05}{0,4}\right) = -2713kPa$$

La distribución de esfuerzos normales se muestra en la figura 3.38.

CAPITULO 4
VIGAS CONTINUAS

Se llaman *vigas continuas* a las vigas estáticamente indeterminadas de varias luces que no tienen rótulas o articulaciones en sus tramos. El grado de indeterminación de dicho sistema se puede calcular por la fórmula:

$$G.I. = R - 3 \tag{4.1}$$

Donde:

R - número de reacciones en los apoyos.

Como se conoce, el empotramiento perfecto tiene tres reacciones, el apoyo fijo dos reacciones y el apoyo movible una reacción.

El cálculo de vigas continuas, consiste en la determinación de las fuerzas internas y las reacciones en los apoyos. La parte más complicada y trabajosa, es la determinación de los momentos flectores en los apoyos de la viga. Para ello, se puede utilizar la ecuación de los tres momentos o el método de los momentos focales.

4.1 ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS

Tal tipo de cálculo se basa en la aplicación de las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas, originando la dependencia de los momentos en los tres apoyos contiguos de la viga continua.

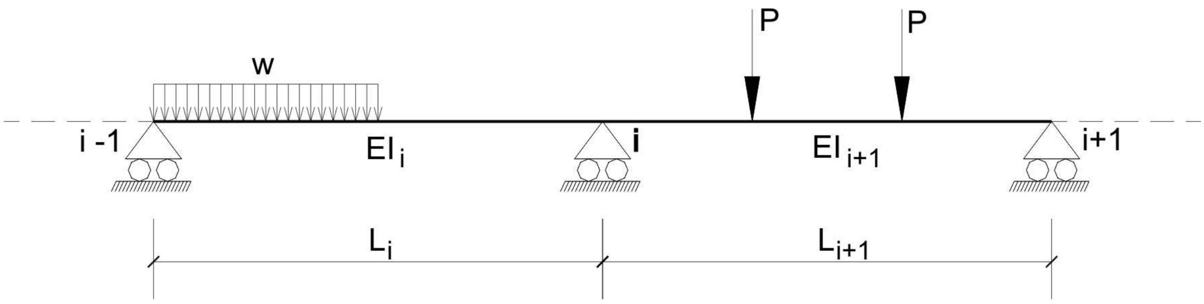


Fig. 4.1

Para el apoyo intermedio *"i"* (figura 4.1), la ecuación de los tres momentos tiene la forma:

$$M_{i-1}L_i^{'} + 2M_i\left(L_i^{'} + L_{i+1}^{'}\right) + M_{i+1}L_{i+1}^{'} = -6\left(B_i^F \frac{L_i^{'}}{L_i} + A_{i+1}^F \frac{L_{i+1}^{'}}{L_{i+1}}\right) \tag{4.2}$$

Donde:

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} - momentos flectores en los apoyos $i-1$, i, $i+1$ (el momento será positivo si tracciona la fibra inferior de la viga);

B_i^F, A_i^F - reacciones ficticias en el apoyo i debido a las cargas, que actúan correspondientemente en las luces L_i y L_{i+1} (los valores de las reacciones ficticias para los tipos de carga más conocidos se muestran en la tabla 4.1);

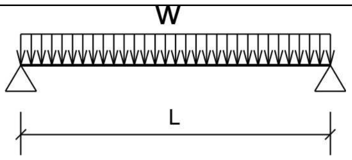
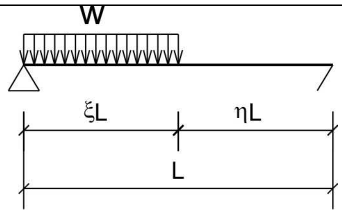
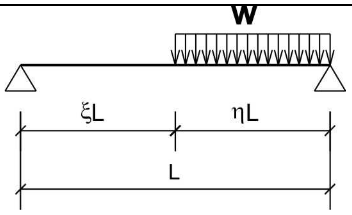
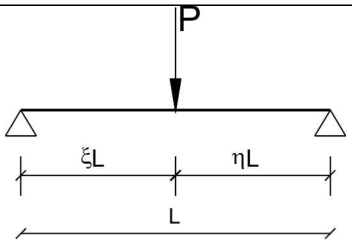
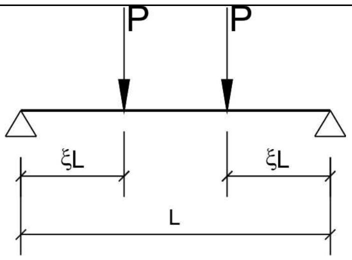
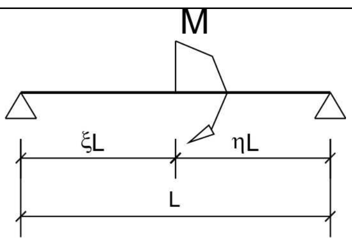
$L_i^{'}$, $L_{i+1}^{'}$ - longitudes asumidas de las luces, que se calculan por la fórmula 4.3.

$$L'_i = L_i \cdot \frac{EI_0}{EI_i} \qquad (4.3)$$

$$L'_{i+1} = L_{i+1} \cdot \frac{EI_0}{EI_{i+1}}$$

Generalmente, la magnitud EI_0 se toma igual a la rigidez en flexión en uno de los tramos de la viga.

Tabla 4.1

Nº	Esquema de carga	A^F	B^F
1		$\frac{wL^3}{24}$	$\frac{wL^3}{24}$
2		$\frac{wL^3}{24}\xi^2(2-\xi)^2$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{9}{384}wL^3$	$\frac{wL^3}{24}\xi^2(2-\xi^2)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{7}{384}wL^3$
3		$\frac{wL^3}{24}\eta^2(2-\eta^2)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{7}{384}wL^3$	$\frac{wL^3}{24}\eta^2(2-\eta)^2$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{9}{384}wL^3$
4		$\frac{PL^2}{6}\xi(1-\xi)(2-\xi)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{1}{16}PL^2$	$\frac{PL^2}{6}\xi(1-\xi^2)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{1}{16}PL^2$
5		$\frac{PL^2}{2}\xi(1-\xi)$ Cuando $\xi = 0,25$ $\frac{3}{32}PL^2$	$\frac{PL^2}{2}\xi(1-\xi)$ Cuando $\xi = 0,25$ $\frac{3}{32}PL^2$
6		$\frac{ML}{6}(3\eta^2-1)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $-\frac{ML}{24}$	$\frac{ML}{6}(1-3\xi^2)$ Cuando $\xi = \eta = 0,5$ $\frac{ML}{24}$

La ecuación de los tres momentos (fórmula 4.2) se puede utilizar, cuando previamente se enumeran los apoyos de izquierda a derecha en forma consecutiva y los números de los tramos, son respectivamente iguales a sus apoyos ubicados a su derecha. Asimismo, si se tienen voladizos, se eliminan las cargas en los volados y se los reemplaza por fuerzas y momentos equivalentes, ubicados en el apoyo extremo. Cuando uno de los apoyos extremos es empotrado, este se lo reemplaza por un tramo ficticio de longitud cero.

La ecuación de los tres momentos se aplica en forma consecutiva, avanzando tramo por tramo. De esta manera, la solución del sistema de ecuaciones nos permite determinar los valores de los momentos flectores en todos los apoyos de la viga continua.

4.2 METODO DE LOS MOMENTOS FOCALES

El método de los momentos focales surge como consecuencia de la ecuación de los tres momentos, donde solo está cargado uno de los apoyos, tal como se muestra en el diagrama M (figura 4.2).

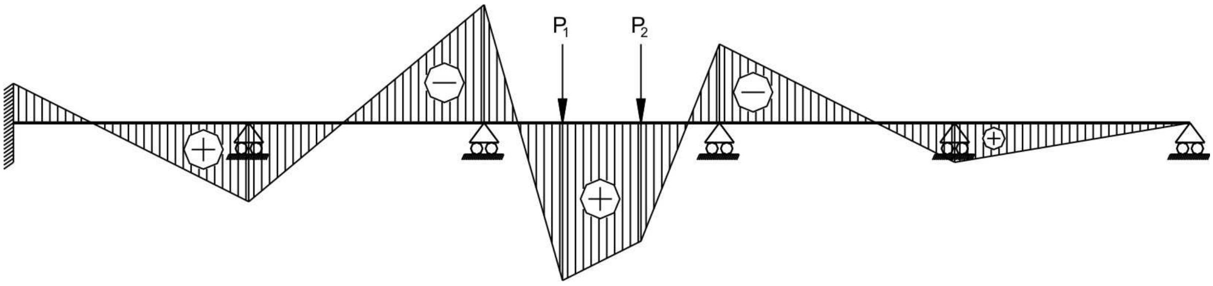


Fig. 4.2

Para ello, en los tramos donde no hay cargas, el diagrama de momento flector será lineal y obligatoriamente intersecará el eje de la viga. Los puntos de intersección, en los cuales los momentos flectores serán iguales a cero, se denominan *puntos de los momentos focales*. La ubicación de estos puntos se llama *fijación*. Estos no dependen del carácter de las cargas en la viga y solamente están relacionados con sus características físicas y geométricas.

En cada tramo se tiene momento focal izquierdo y derecho. Si el tramo está ubicado a la izquierda de la carga, entonces el diagrama de momento flector pasa a través del foco izquierdo y si está ubicado a la derecha, entonces pasará a través del foco derecho. De esta manera, la relación entre los momentos en los apoyos en el tramo no cargado es una magnitud constante, la cual depende de la ubicación exacta del foco y se denomina *relación focal*.

Para el foco izquierdo F_i (figura 4.3) se tiene:

$$K_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}} \qquad (4.4)$$

Para el foco derecho F_i' (figura 4.4) será:

$$K_i' = -\frac{M_{i-1}}{M_i} \qquad (4.5)$$

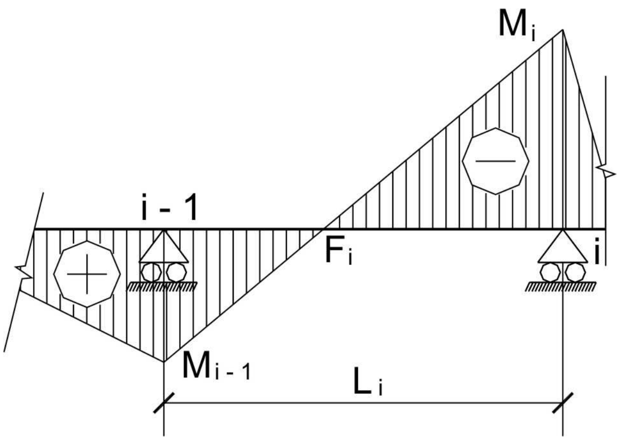


Fig. 4.3

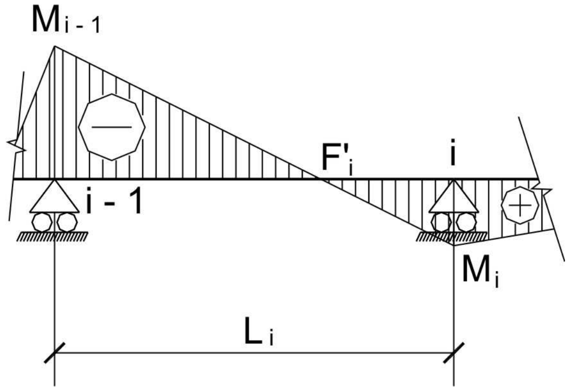


Fig. 4.4

Las relaciones focales se determinan por las siguientes fórmulas:

Relación focal izquierda:

$$K_i = 2 + \frac{L'_{i-1}}{L'_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i-1}}\right) \qquad (4.6)$$

Relación focal derecha:

$$K'_i = 2 + \frac{L'_{i+1}}{L'_i}\left(2 - \frac{1}{K'_{i+1}}\right) \qquad (4.7)$$

En las fórmulas 4.6 y 4.7, se pueden determinar la relación focal izquierda K_i en el tramo L_i, si es conocida la relación focal izquierda K_{i-1} en el tramo anterior L_{i-1}, y la relación focal derecha K'_i, si es conocido K'_{i+1} en el siguiente tramo. De esta manera, se pueden determinar las relaciones focales izquierda, empezando desde el extremo izquierdo de la viga, y las relaciones focales derecha, si empezamos desde el lado derecho de la misma viga. Para ello, las relaciones focales en los tramos extremos de la viga son conocidos: si el apoyo es fijo o movible, su foco se encuentra en el mismo apoyo y su correspondiente relación focal $K = \infty \ (K' = \infty)$. Si el apoyo extremo es un empotramiento perfecto, su foco se encuentra a una distancia $L/3$ del empotramiento y su correspondiente relación focal $K = 2 \ (K' = 2)$.

La ubicación de los focos en el tramo mostrado en la figura 4.5, se dan en función de las relaciones focales a través de la fórmula 4.8.

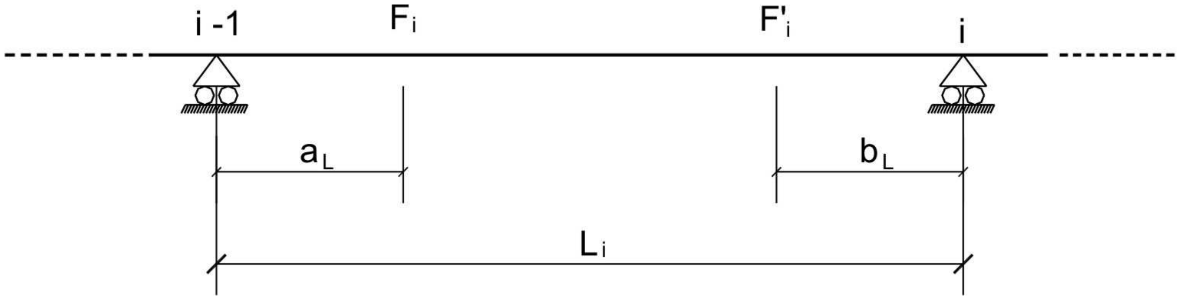


Fig. 4.5

$$a_i = \frac{L_i}{1+K_i} \qquad (4.8)$$

$$b_i = \frac{L_i}{1+K_i^{'}}$$

En el tramo cargado, el diagrama de momento flector no pasa por los puntos focales y su gráfico depende del tipo de carga. Los momentos en los apoyos extremos del tramo cargado, se determinan por las fórmulas 4.9 y 4.10.

Para el apoyo izquierdo del tramo:

$$M_{i-1} = M_{izq} = -\frac{6}{L_i}.\frac{A_i^F K_i^{'} - B_i^F}{K_i K_i^{'} - 1} \qquad (4.9)$$

Para el apoyo derecho del tramo:

$$M_i = M_{der} = -\frac{6}{L_i}.\frac{B_i^F K_i - A_i^F}{K_i K_i^{'} - 1} \qquad (4.10)$$

Donde A_i^F , B_i^F son las reacciones ficticias en los extremos del tramo cargado.

Si está cargado el tramo extremo, siendo su apoyo fijo o movible, entonces las fórmulas 4.9 y 4.10 serán necesarias reemplazarlas por las fórmulas 4.11 y 4.12.

$$M_{i-1} = M_{izq} = -\frac{6}{L_i}.\frac{A_i^F - B_i^F.\dfrac{1}{K_i^{'}}}{K_i - \dfrac{1}{K_i^{'}}} \qquad (4.11)$$

$$M_i = M_{der} = -\frac{6}{L_i}.\frac{B_i^F - A_i^F.\dfrac{1}{K_i}}{K_i^{'} - \dfrac{1}{K_i}} \qquad (4.12)$$

El cálculo se inicia con la determinación de los momentos en los apoyos en los extremos del tramo cargado, utilizando las fórmulas 4.9, 4.10 o 4.11, 4.12. Luego, se desplaza desde el tramo cargado hasta el extremo de la viga, utilizando las fórmulas 4.4, 4.5, determinando, de esta manera, el resto de los momentos en los apoyos.

El método de los momentos focales puede ser aplicado para el cálculo de vigas, en las cuales está cargado sólo un tramo. En el caso, que estén cargados varios tramos, se aplicará el principio de

superposición de cargas, analizándose cada tramo por separado y se suman dichos resultados, obteniéndose los valores finales.

4.3 DETERMINACION DE LAS FUERZAS INTERNAS Y REACCIONES EN LOS APOYOS

Las fuerzas internas en la sección de cualquier tramo de la viga continua de la figura 4.6, se puede expresar a través de los momentos en los apoyos en los extremos del tramo:

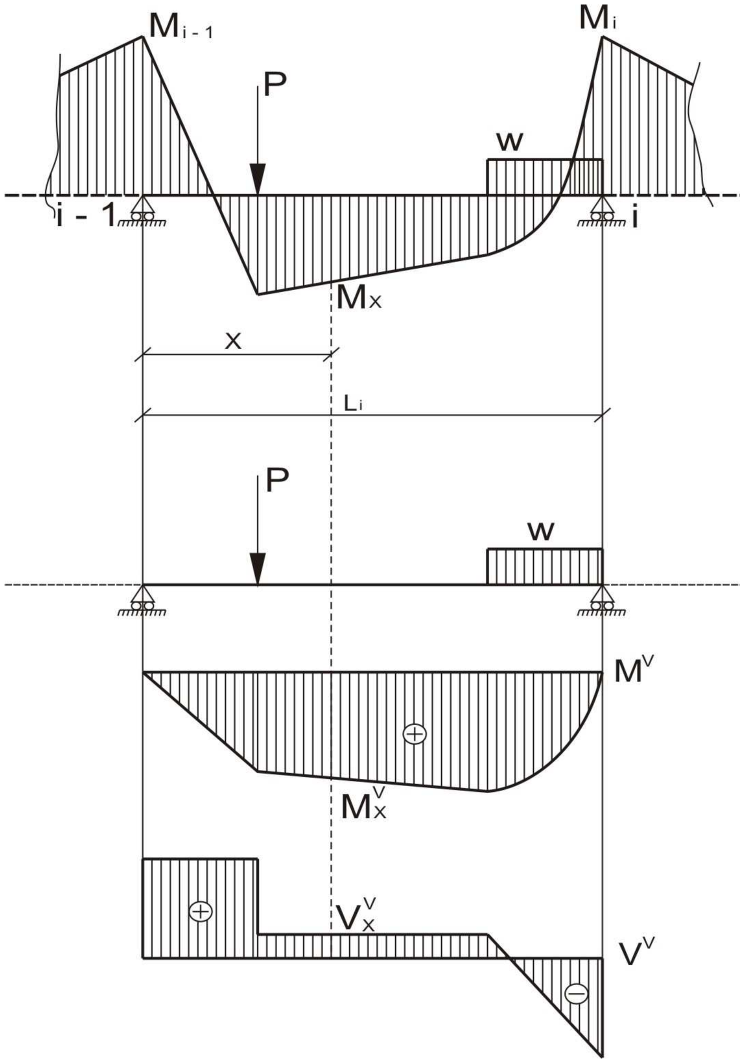


Fig. 4.6

$$M_X = \frac{M_{i-1}}{L_i}(L_i - x) + \frac{M_i}{L_i}x + M_X^v \qquad (4.13)$$

$$V_X = \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} + V_X^v \qquad (4.14)$$

Donde:

M_{i-1}, M_i - momentos en los apoyos en los extremos izquierdo y derecho del tramo de la viga continua;

M_X^v, V_X^v - momento flector y fuerza cortante en la sección x de la viga de un solo tramo, debido a la carga externa en tal tramo.

Las reacciones en los apoyos se calcularán por la fórmula:

$$R_i = V_{der} - V_{izq} \tag{4.15}$$

Donde:

V_{der}, V_{izq} - fuerza cortante a la izquierda y derecha del apoyo i.

Para cálculos prácticos la fórmula 4.13 se utiliza en los casos, cuando es necesario calcular el momento flector en cierta sección de la viga. Para graficar el diagrama M en toda la viga se utiliza la siguiente fórmula:

$$M = M_{apoyo} + M^{v} \tag{4.16}$$

Donde:

M^{v} - diagrama de momento flector, debido a la carga externa en los tramos, como en las vigas de un solo tramo;

M_{apoyo} - diagrama de momentos en los apoyos.

Para obtener el diagrama M_{apoyo}, la magnitud de los momentos en los apoyos se ubica sobre los apoyos correspondientes, uniendo por líneas rectas las ordenadas de las mismas.

4.4 DETERMINACION DE LAS FUERZAS DE CÁLCULO

Como es conocido, la viga continua se encuentra bajo la acción de dos tipos de fuerzas externas:

- carga muerta, que es constante y corresponde al peso propio de la viga.
- carga viva, que corresponde al peso de la instalación, materiales, personas y otros, los cuales pueden ubicarse en la viga en el proceso de explotación. Esta carga en los diferentes períodos puede variar en magnitud y ubicación.

Las fuerzas de cálculo en la sección de la viga están dadas por la combinación más peligrosa de cargas, que surgen en la sección por las diferentes combinaciones de carga muerta y carga viva. En cada sección se analizan dos fuerzas de cálculo: máxima y mínima.

$$S_{máx} = S_{muerta} + \sum(+S_{viva}) \tag{4.17}$$

$$S_{mín} = S_{muerta} + \sum(-S_{viva})$$

Donde:

S_{muerta} - fuerza debido a la acción de la carga muerta;

$\sum(+S_{viva})$, $\sum(-S_{viva})$ - suma de las fuerzas positivas y negativas en la sección, debido a la acción de las cargas vivas.

Los diagramas de fuerzas de cálculo, graficados en el esquema de la viga, se denominan diagramas de envolvente.

4.5 LINEAS DE INFLUENCIA

Las líneas de influencia, vienen a ser aquellos gráficos, que muestran como cambian estas fuerzas debido al desplazamiento de la carga vertical unitaria por toda la viga.

Si la carga vertical $P = 1$ se encuentra en uno de los tramos de la viga continua (figura 4.7), entonces los momentos en los apoyos en los extremos del tramo cargado se pueden expresar por las fórmulas 4.9, 4.10 o 4.11, 4.12, los cuales para tal tipo de carga serán:

$$M_{i-1} = M_{izq} = -\frac{L_i}{K_i K_i^{'} - 1}.\left(vK_i^{'} - u\right) \qquad (4.18)$$

$$M_i = M_{der} = -\frac{L_i}{K_i K_i^{'} - 1}.\left(uK_i - v\right) \qquad (4.19)$$

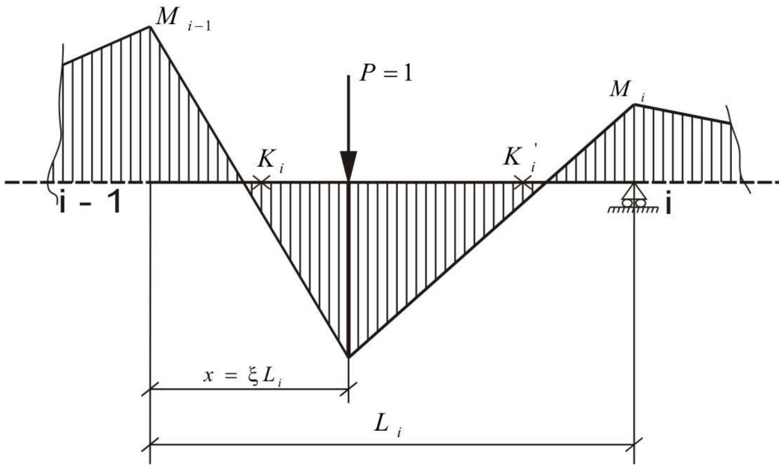


Fig. 4.7

Cuando la carga $P = 1$ se encuentra en el tramo extremo, que termina en apoyo fijo o movible, se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

$$M_{i-1} = M_{izq} = -\frac{L_i}{K_i - \frac{1}{K_i^{'}}}.\left(v - u.\frac{1}{K_i^{'}}\right) \qquad (4.20)$$

$$M_i = M_{der} = -\frac{L_i}{K_i^{'} - \frac{1}{K_i}}.\left(u - v.\frac{1}{K_i}\right) \qquad (4.21)$$

Las magnitudes u y v son funciones de la coordenada $x = \xi.L$, donde actúa la carga unitaria:

$$u = \xi.\left(1 - \xi^2\right) \qquad (4.22)$$

$$v = \xi.\left(1 - \xi\right).\left(2 - \xi\right)$$

$$\xi = \frac{x}{L_i}$$

En la tabla 4.2 se dan los valores de u y v para ciertos valores de ξ .

Los momentos flectores que surgen en los extremos de los tramos no cargados, se calculan a través de las fórmulas 4.4 y 4.5.

Con ayuda de las fórmulas indicadas, se encuentran los momentos en los apoyos para la ubicación de las fuerzas en varias secciones de cada tramo. A través de los valores calculados se grafica la línea de influencia de los momentos en los apoyos.

Tabla 4.2

ξ	u	v
0	0	0
0,25	0,2344	0,3281
0,5	0,3750	0,3750
0,75	0,3281	0,2344
1	0	0

Las líneas de influencia de momento flector y fuerza cortante en los tramos de la viga, se grafican en base a las fórmulas 4.13, 4.14. Las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos, se obtienen como la diferencia de las líneas de influencia de las cortantes a la derecha e izquierda del apoyo, es decir, aplicando la fórmula 4.15.

4.6 DETERMINACION DE LAS FUERZAS INTERNAS CON AYUDA DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA

Las líneas de influencia nos dan la posibilidad de determinar las fuerzas, para los cuales fueron graficadas, debido a la acción de la carga inmóvil.

Si la viga está cargada por un sistema de fuerzas verticales puntuales $P_1, P_2, ..., P_n$, entonces la fuerza S se puede calcular por la fórmula:

$$S = \sum_{i=1,2,...}^{n} P_i y_i \tag{4.23}$$

Donde:

y_i - ordenadas de la línea de influencia S debido a las cargas.

Si la viga se encuentra bajo la acción de una carga uniformemente distribuida w, entonces la magnitud S se determinará por la fórmula:

$$S = wA_{sw} \tag{4.24}$$

Donde:

A_{sw} - área de la línea de influencia S bajo la acción de la carga uniformemente distribuida w.

En la viga continua, las líneas de influencia vienen a ser líneas curvas. Para calcular las áreas de las zonas formadas por las líneas curvas, se puede utilizar las fórmulas de integración numérica:

Fórmula del trapecio:

$$A \approx \frac{L}{m}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + \frac{1}{2}y_m\right) \tag{4.25}$$

Fórmula de Simpson:

$$A \approx \frac{L}{3m}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_{m-1} + y_m\right) \tag{4.26}$$

Donde:

L - longitud del intervalo de integración;

m - número de tramos iguales de longitud, que se ha dividido el intervalo de integración (para utilizar la fórmula de Simpson, dicho número será obligatoriamente par);

y_i - ordenadas de la línea de influencia S en los puntos de división del intervalo.

4.7 CALCULO ANALITICO DE VIGA CONTINUA

En el esquema de la viga continua mostrada en la figura 4.8, actúan la carga muerta $g = 1{,}2 kN/m$ y las cargas vivas $w = 4kN/m$, $P = 15kN$, $M = 18kN.m$. Se pide determinar las fuerzas internas en la viga, debido a la acción de las cargas muerta y viva, graficar los diagramas de envolvente M y V; así como las líneas de influencia de los momentos y reacciones en los apoyos, momento flector y fuerza cortante en la sección K, ubicada en el tramo de inercia $2I_0$ y a una distancia de 3m del apoyo izquierdo.

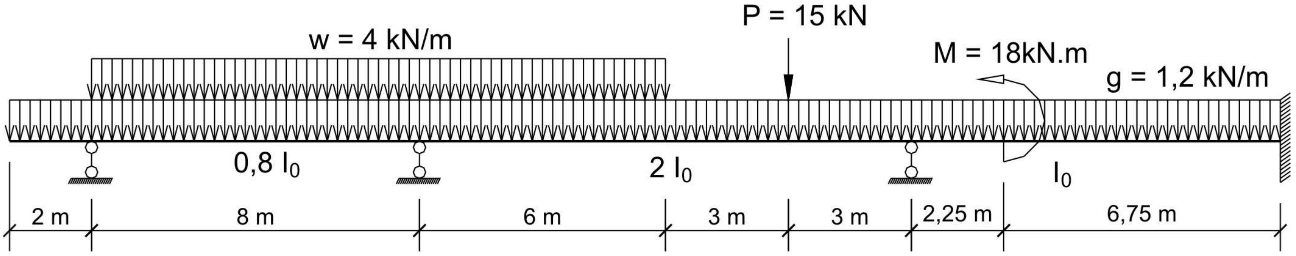


Fig. 4.8

Enumeramos los apoyos y los tramos de la viga, tal como se muestra en la figura 4.9.

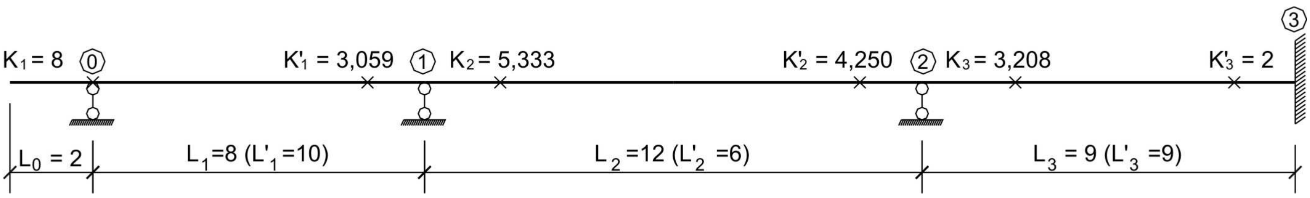


Fig. 4.9

Las longitudes asumidas de los tramos son:

$$L_1' = \frac{EI_0}{0{,}8EI_0}.8 = 10m$$

$$L_2' = \frac{EI_0}{2EI_0}.12 = 6m$$

$$L_3' = \frac{EI_0}{EI_0}.9 = 9m$$

En las tablas 4.3 y 4.4, se dan las relaciones focales izquierda y derecha, así como la ubicación de los focos en los tramos de la viga.

Tabla 4.3

RELACIONES FOCALES	
IZQUIERDA	DERECHA
$K_i = 2 + \frac{L'_{i-1}}{L'_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i-1}}\right)$	$K'_i = 2 + \frac{L'_{i+1}}{L'_i}\left(2 - \frac{1}{K'_{i+1}}\right)$
$K_1 = \infty$ $K_2 = 2 + \frac{10}{6}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 5{,}333$ $K_3 = 2 + \frac{6}{9}\left(2 - \frac{1}{5{,}333}\right) = 3{,}208$	$K'_3 = 2$ $K'_2 = 2 + \frac{9}{6}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 4{,}250$ $K'_1 = 2 + \frac{6}{10}\left(2 - \frac{1}{4{,}250}\right) = 3{,}059$

Tabla 4.4

UBICACIÓN DE LOS FOCOS EN LOS TRAMOS DE LA VIGA	
$a_1 = \frac{8}{1+\infty} = 0$ $a_2 = \frac{12}{1+5{,}333} = 1{,}89m$ $a_3 = \frac{9}{1+3{,}208} = 2{,}14m$	$b_1 = \frac{8}{1+3{,}059} = 1{,}97m$ $b_2 = \frac{12}{1+4{,}250} = 2{,}28m$ $b_3 = \frac{9}{1+2} = 3{,}00m$

CALCULO ANTE LA ACCION DE LA CARGA MUERTA

a) DETERMINACION DE LOS MOMENTOS EN LOS APOYOS POR LA ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS

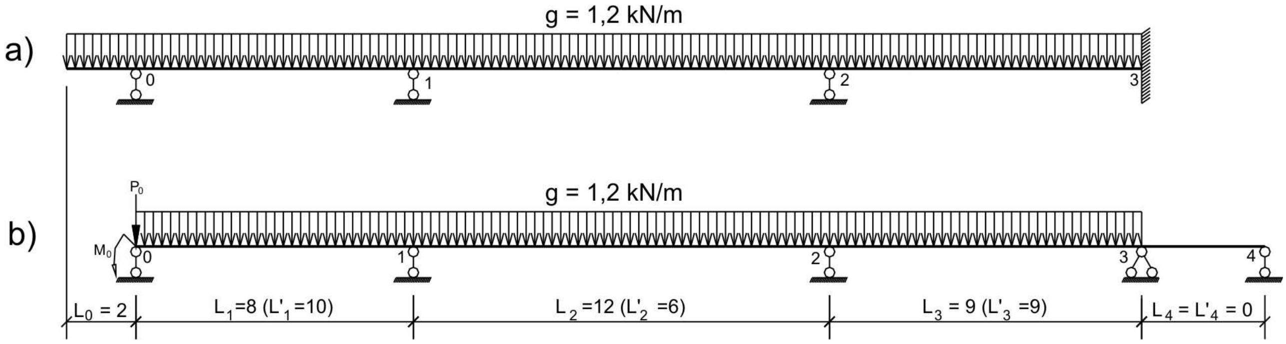


Fig. 4.10

Reemplazamos el esquema de cálculo de la figura 4.10,a, por el de la figura 4.10,b, eliminando el voladizo L_0 y reemplazando el empotramiento por un tramo ficticio de longitud cero. La carga en el tramo eliminado del voladizo lo reemplazamos por un momento y una fuerza, tal como se muestra en la figura 4.10,b.

$$M_0 = -\frac{gL_0^2}{2} = -\frac{1,2.2^2}{2} = -2,4kN.m$$

$$P_0^{'} = gL_0 = 1,2.2 = 2,4kN$$

El signo menos en el momento indica que las fibras superiores de la viga son traccionadas. El momento en el apoyo del tramo ficticio es:

$$M_4 = 0$$

Las reacciones ficticias en los apoyos se determinan a través de la tabla 4.1:

$$A_1^F = B_1^F = \frac{gL_1^3}{24} = \frac{1,2.8^3}{24} = 25,6kN.m^2$$

$$A_2^F = B_2^F = \frac{gL_2^3}{24} = \frac{1,2.12^3}{24} = 86,4kN.m^2$$

$$A_3^F = B_3^F = \frac{gL_3^3}{24} = \frac{1,2.9^3}{24} = 36,45kN.m^2$$

$$A_4^F = B_4^F = 0$$

Ahora formulamos las ecuaciones de los tres momentos para los apoyos intermedios.

APOYO 1 $(i = 1)$:

$$M_0 L_1^{'} + 2M_1\left(L_1^{'} + L_2^{'}\right) + M_2 L_2^{'} = -6\left(B_1^F.\frac{L_1^{'}}{L_1} + A_2^F.\frac{L_2^{'}}{L_2}\right)$$

$$(-2,4).10 + 2M_1.(10+6) + M_2.6 = -6\left(25,6.\frac{10}{8} + 86,4.\frac{6}{12}\right)$$

$$32M_1 + 6M_2 = -427,2$$

APOYO 2 $(i = 2)$:

$$M_1 L_2^{'} + 2M_2\left(L_2^{'} + L_3^{'}\right) + M_3 L_3^{'} = -6\left(B_2^F.\frac{L_2^{'}}{L_2} + A_3^F.\frac{L_3^{'}}{L_3}\right)$$

$$M_1.6 + 2M_2.(6+9) + M_3.9 = -6\left(86,4.\frac{6}{12} + 36,45.\frac{9}{9}\right)$$

$$6M_1 + 30M_2 + 9M_3 = -477,9$$

APOYO 3 $(i = 3)$:

$$M_2 L_3^{'} + 2M_3\left(L_3^{'} + L_4^{'}\right) + M_4 L_4^{'} = -6\left(B_3^F.\frac{L_3^{'}}{L_3} + A_4^F.\frac{L_4^{'}}{L_4}\right)$$

$$M_2.9 + 2M_3.(9+0) + 0 = -6\left(36,45.\frac{9}{9} + 0\right)$$

$$9M_2 + 18M_3 = -218,7$$

De esta manera, tenemos un sistema de tres ecuaciones:

$$32M_1 + 6M_2 = -427,2$$

$$6M_1 + 30M_2 + 9M_3 = -477,9$$

$$9M_2 + 18M_3 = -218,7$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones y encontramos:

$$M_1 = -11,131 kN.m$$

$$M_2 = -11,834 kN.m$$

$$M_3 = -6,233 kN.m$$

Para comprobar la correcta solución del sistema de ecuaciones, reemplazamos los valores obtenidos en la suma de las ecuaciones, es decir:

$$38M_1 + 45M_2 + 27M_3 = -1123,8$$

$$38.(-11,131) + 45.(-11,834) + 27.(-6,233) = -1123,8$$

b) DETERMINACION DE LOS MOMENTOS EN LOS APOYOS POR EL METODO DE LOS MOMENTOS FOCALES

Determinamos los momentos en los apoyos debido a la acción de la carga muerta $g = 1,2 kN/m$ en cada tramo, pero analizándolo en forma separada.

1. Cuando la carga muerta actúa en el tramo L_0 (figura 4.11)

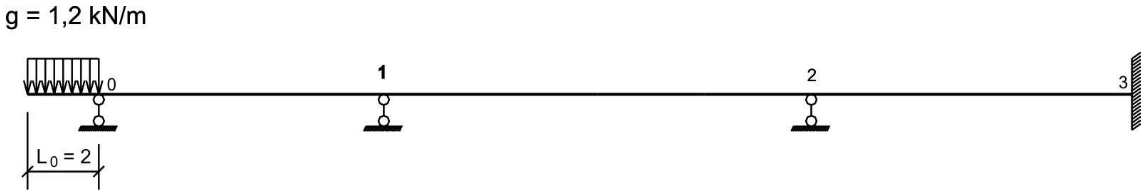


Fig. 4.11

$$M_0 = -1,2.2.1 = -2,4 kN.m$$

$$M_1 = -\frac{M_0}{K_1^{'}} = -\frac{(-2,4)}{3,059} = 0,785 kN.m$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{K_2^{'}} = -\frac{0,785}{4,25} = -0,185 kN.m$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3^{'}} = -\frac{(-0,185)}{2} = 0,092 kN.m$$

2. Cuando la carga muerta actúa en el tramo L_1 (figura 4.12)

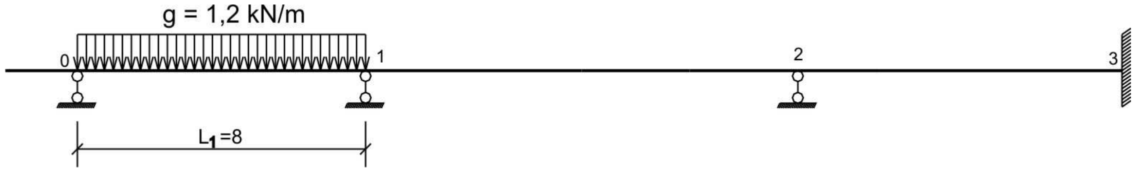


Fig. 4.12

$$A_1^F = B_1^F = \frac{gL_1^3}{24} = \frac{1{,}2.8^3}{24} = 25{,}6 kN.m^2$$

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = M_{der} = -\frac{6}{8}.\frac{25{,}6 - 25{,}6.\frac{1}{\infty}}{3{,}059 - \frac{1}{\infty}} = -6{,}276 kN.m$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{K_2^{'}} = -\frac{(-6{,}276)}{4{,}25} = 1{,}477 kN.m$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3^{'}} = -\frac{1{,}477}{2} = -0{,}738 kN.m$$

3. Cuando la carga muerta actúa en el tramo L_2 (figura 4.13)

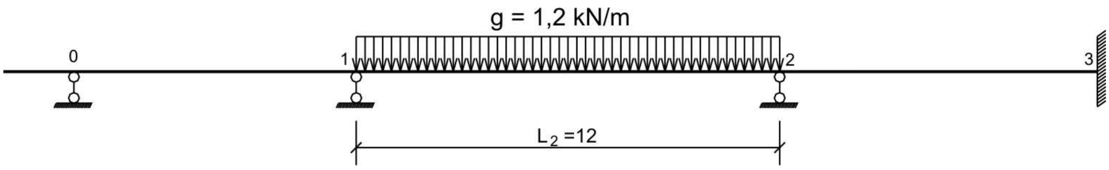


Fig. 4.13

$$A_2^F = B_2^F = \frac{gL_2^3}{24} = \frac{1{,}2.12^3}{24} = 86{,}4 kN.m^2$$

$$M_1 = M_{izq} = -\frac{6}{L_2}.\frac{A_2^F K_2^{'} - B_2^F}{K_2 K_2^{'} - 1} = -\frac{6}{12}.\frac{86{,}4.4{,}25 - 86{,}4}{5{,}333.4{,}25 - 1} = -6{,}480 kN.m$$

$$M_2 = M_{der} = -\frac{6}{L_2}.\frac{B_2^F K_2 - A_2^F}{K_2 K_2^{'} - 1} = -\frac{6}{12}.\frac{86{,}4.5{,}333 - 86{,}4}{5{,}333.4{,}25 - 1} = -8{,}640 kN.m$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{(-6{,}480)}{\infty} = 0$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3^{'}} = -\frac{(-8{,}640)}{2} = 4{,}320 kN.m$$

4. Cuando la carga muerta actúa en el tramo L_3 (figura 4.14)

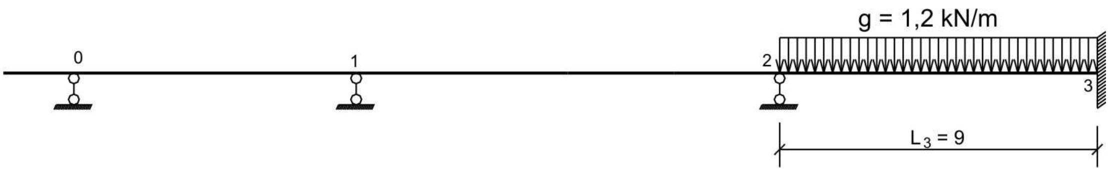


Fig. 4.14

$$A_3^F = B_3^F = \frac{gL_3^3}{24} = \frac{1{,}2.9^3}{24} = 36{,}45 kN.m^2$$

$$M_2 = M_{izq} = -\frac{6}{L_3}.\frac{A_3^F K_3^{'} - B_3^F}{K_3 K_3^{'} - 1} = -\frac{6}{9}.\frac{36{,}45.2 - 36{,}45}{3{,}208.2 - 1} = -4{,}487 kN.m$$

$$M_3 = M_{der} = -\frac{6}{L_3}.\frac{B_3^F K_3 - A_3^F}{K_3 K_3^{'} - 1} = -\frac{6}{9}.\frac{36,45.3,208 - 36,45}{3,208.2 - 1} = -9,907 kN.m$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{K_2} = -\frac{(-4,487)}{5,333} = 0,841 kN.m$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{0,841}{\infty} = 0$$

5. Los momentos finales en los apoyos se muestra en la tabla 4.5, sumando los momentos debido a la acción separada de cada tipo de carga.

Tabla 4.5

Tramo cargado	M_0	M_1	M_2	M_3
L_0	-2,4	0,785	-0,185	0,092
L_1	0	-6,276	1,477	-0,738
L_2	0	-6,480	-8,640	4,320
L_3	0	0,841	-4,487	-9,907
Σ	-2,4	-11,130	-11,835	-6,233

c) DETERMINACION DE LAS FUERZAS INTERNAS Y REACCIONES EN LOS APOYOS

1. Graficamos el diagrama de momentos en los apoyos, colocando en los mismos los valores obtenidos en la tabla 4.5 y los unimos por medio de líneas rectas, tal como se muestra en la figura 4.15.

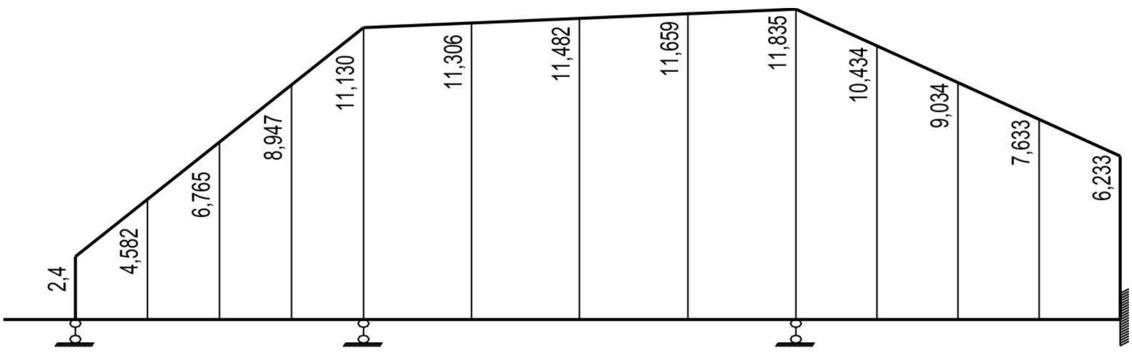


Fig. 4.15 Diagrama M_{apoyo}

En la figura 4.16 se muestran los diagramas M^V y V^V de la viga sometida a la acción de la carga muerta, graficado cada tramo como una viga simplemente apoyada.

El diagrama final de momento flector M de la viga continua, será igual a la suma del diagrama de momentos en los apoyos M_{apoyo} con el diagrama M^V, tal como se muestra en la figura 4.17.

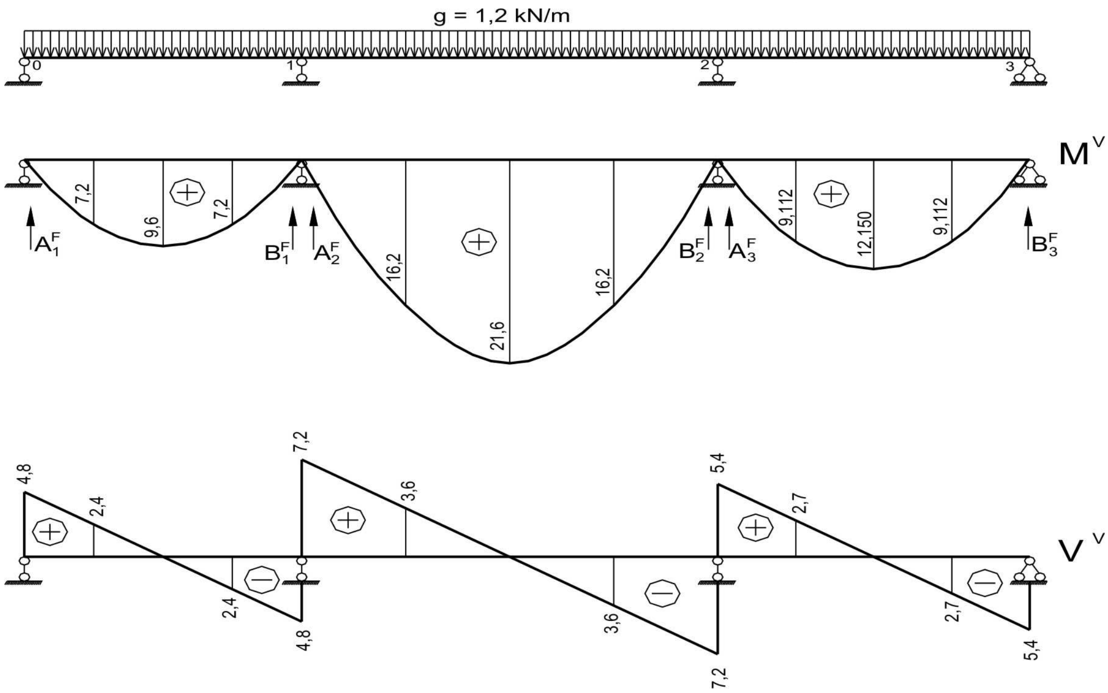


Fig. 4.16

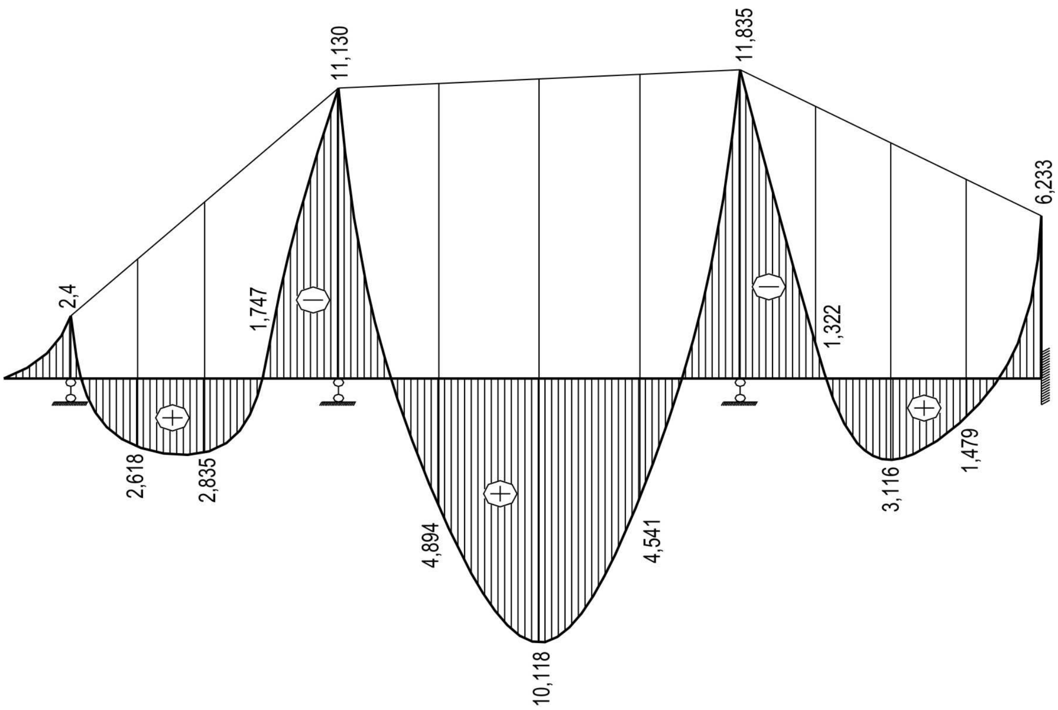


Fig. 4.17 Diagrama M

En el tramo de longitud L_0, el diagrama M se graficó como una viga isostática en voladizo.

2. Realizamos la comprobación cinemática (deformación) de cálculo. Para ello, elegimos el sistema principal del método de las fuerzas y graficamos la suma de los diagramas unitarios M_S, tal como se muestra en la figura 4.18.

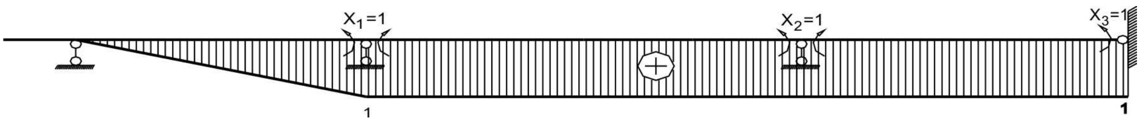


Fig. 4.18 Diagrama M_S

$$\Delta_S = \sum \int_L \frac{M_S M}{EI} dx$$

$$\Delta_S = \frac{8}{6.0,8EI_0}\left(0 + 4.\frac{1}{2}.2,835 - 1.11,130\right) + \frac{12}{6.2EI_0}(-1.11,130 + 4.1.10,118 - 1.11,835) +$$

$$+\frac{9}{6EI_0}(-1.11,835 + 4.1.3,116 - 1.6,233) = -\frac{9,100}{EI_0} + \frac{17,507}{EI_0} - \frac{8,406}{EI_0} = \frac{17,507}{EI_0} - \frac{17,506}{EI_0} \approx 0$$

Error porcentual: $\varepsilon = \frac{17,507 - 17,506}{17,507}.100\% = 0,006\%$

3. Calculamos las fuerzas cortantes

$$V_{vol} = -1,2.2 = -2,4kN$$

$$V_{0-1} = \frac{(-11,130) - (-2,4)}{8} + 4,8 = 3,709kN$$

$$V_{1-0} = \frac{(-11,130) - (-2,4)}{8} + (-4,8) = -5,891kN$$

$$V_{1-2} = \frac{(-11,835) - (-11,130)}{12} + 7,2 = 7,141kN$$

$$V_{2-1} = \frac{(-11,835) - (-11,130)}{12} + (-7,2) = -7,259kN$$

$$V_{2-3} = \frac{(-6,233) - (-11,835)}{9} + 5,4 = 6,022kN$$

$$V_{3-2} = \frac{(-6,233) - (-11,835)}{9} + (-5,4) = -4,778kN$$

En la figura 4.19 se muestra el diagrama final de fuerza cortante V de la viga continua.

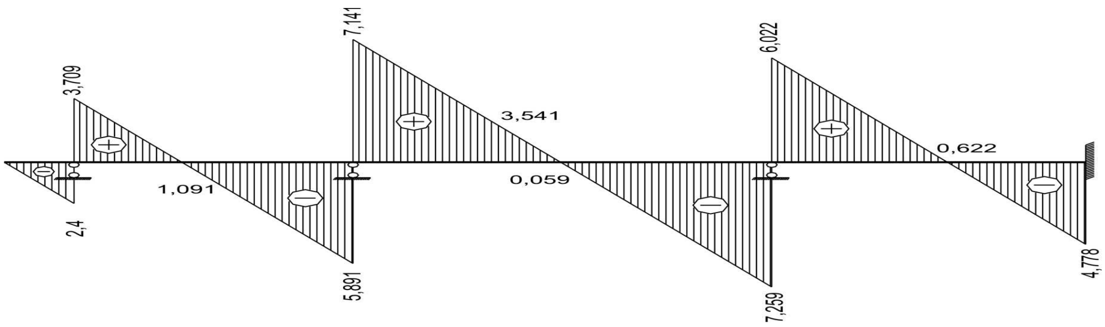


Fig. 4.19 Diagrama V

4. Calculamos las reacciones en los apoyos

$$R_0 = 3,709 - (-2,4) = 6,109kN$$

$$R_1 = 7,141 - (-5,891) = 13,032kN$$

$$R_2 = 6,022 - (-7,259) = 13,281kN$$

$$R_3 = 0 - (-4,778) = 4,778kN$$

5. Comprobamos el equilibrio de la viga

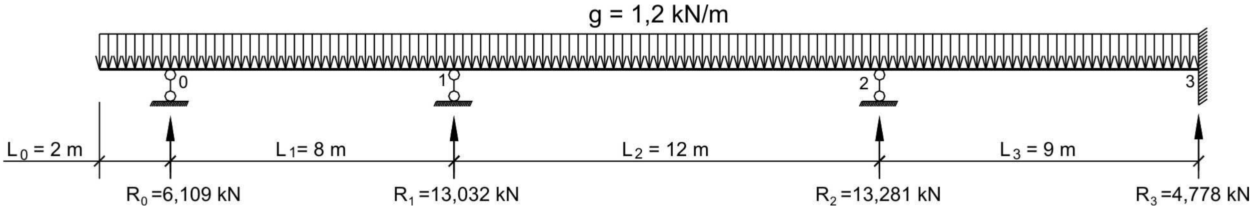


Fig. 4.20

$$\sum F_Y = -1{,}2(2+8+12+9)+6{,}109+13{,}032+13{,}281+4{,}778=0$$

CALCULO ANTE LA ACCION DE LA CARGA VIVA

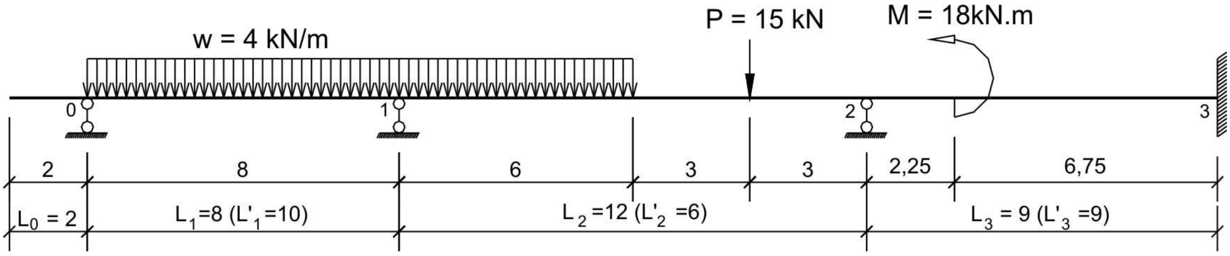


Fig. 4.21 Esquema de cargas vivas

a) CARGA VIVA $w = 4kN/m$ **EN EL TRAMO** L_1

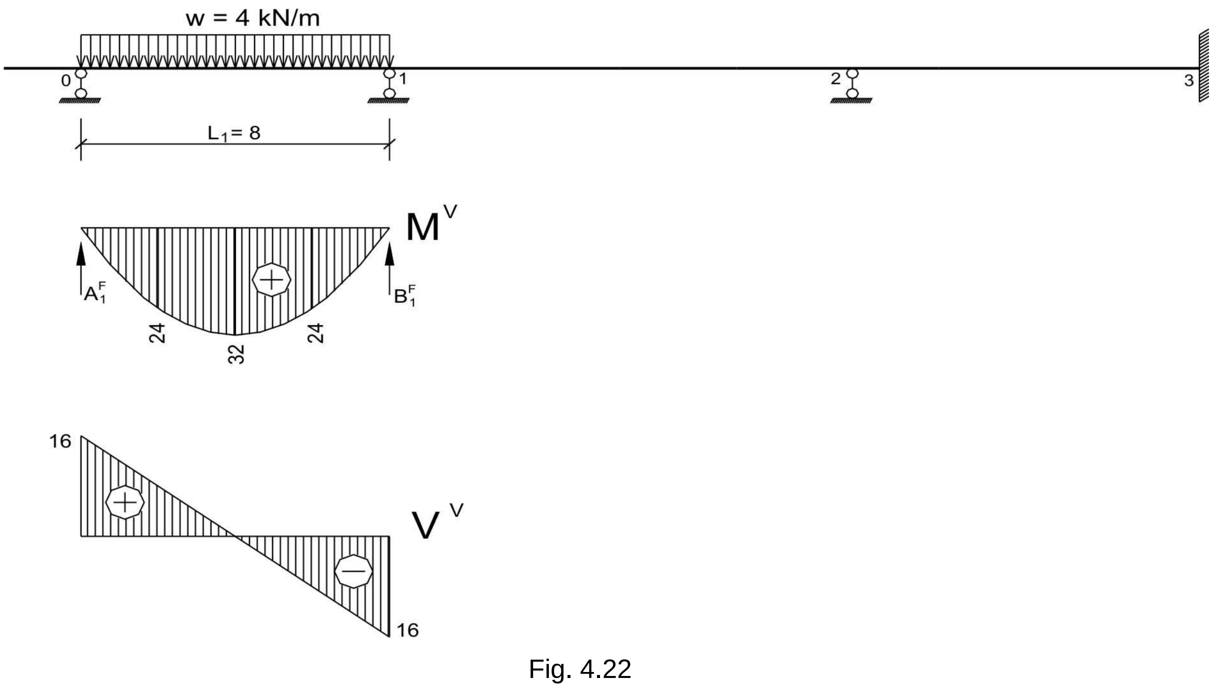


Fig. 4.22

$$A_1^F = B_1^F = \frac{wL_1^3}{24} = \frac{4.8^3}{24} = 85{,}333kN.m^2$$

1. Calculamos los momentos en los apoyos

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = -\frac{6}{8}\cdot\frac{85{,}333 - 85{,}333.\frac{1}{\infty}}{3{,}059 - \frac{1}{\infty}} = -20{,}922\text{kN.m}$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{K_2'} = -\frac{(-20{,}922)}{4{,}25} = 4{,}923\text{kN.m}$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3'} = -\frac{4{,}923}{2} = -2{,}461\text{kN.m}$$

2. Graficamos el diagrama final de momento flector

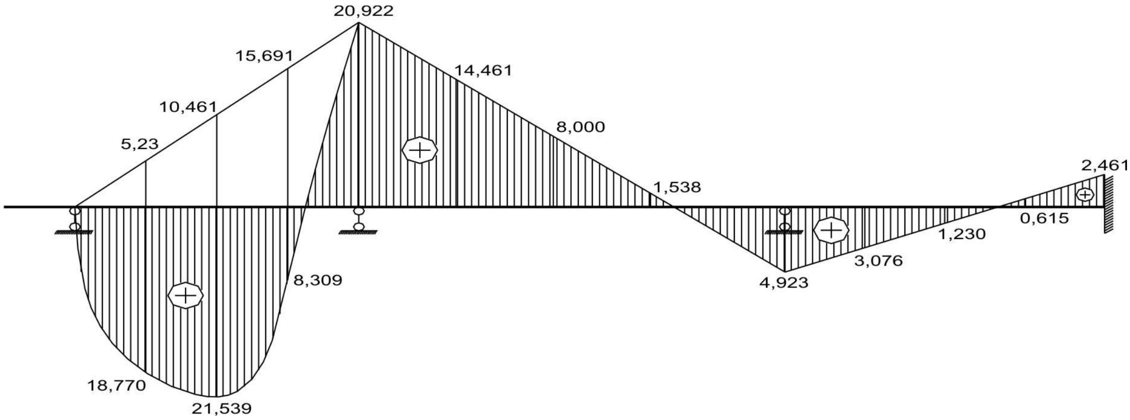


Fig. 4.23 Diagrama M_I

3. Realizamos la comprobación cinemática del cálculo

$$\Delta_{SI} = \sum \int_L \frac{M_S M_I}{EI} dx = \frac{8}{6.0{,}8EI_0}\left(0 + 4.\frac{1}{2}.21{,}539 - 1.20{,}922\right) - \frac{1}{2EI_0}.1.12.8{,}000 +$$

$$+\frac{1}{EI_0}.1.9.1{,}230 = \frac{36{,}927}{EI_0} - \frac{48{,}000}{EI_0} + \frac{11{,}070}{EI_0} = \frac{47{,}997}{EI_0} - \frac{48{,}000}{EI_0} = -\frac{0{,}003}{EI_0} \approx 0$$

Error porcentual: $\varepsilon = \frac{0{,}003}{48{,}000}.100\% = 0{,}006\%$

4. Calculamos las fuerzas cortantes

$$V_{0-1} = \frac{(-20{,}922) - 0}{8} + 16 = 13{,}385\text{kN}$$

$$V_{1-0} = \frac{(-20{,}922) - 0}{8} + (-16) = -18{,}615\text{kN}$$

$$V_{1-2} = V_{2-1} = \frac{4{,}923 - (-20{,}922)}{12} = 2{,}154\text{kN}$$

$$V_{2-3} = V_{3-2} = \frac{(-2{,}461) - 4{,}923}{9} = -0{,}820\text{kN}$$

En la figura 4.24, se muestra el diagrama final de fuerza cortante:

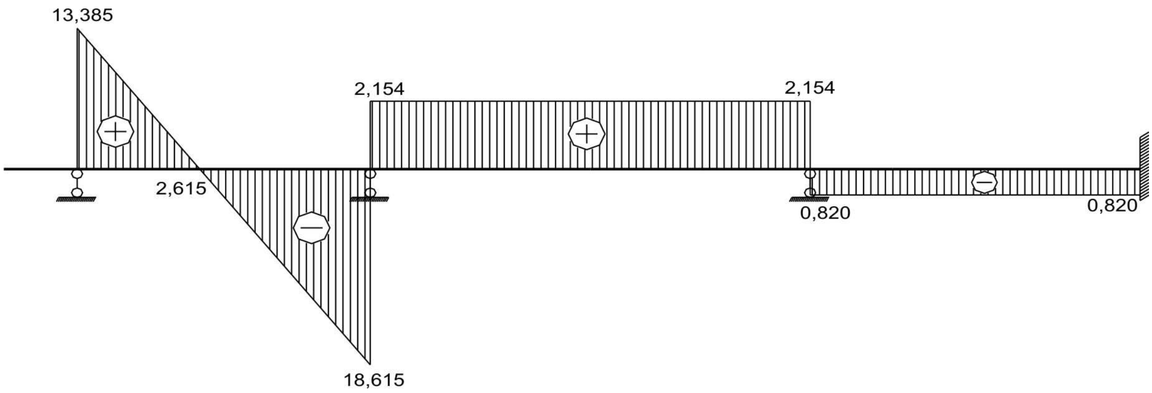


Fig. 4.24 Diagrama V_I

5. Calculamos las reacciones en los apoyos

$$R_0 = 13{,}385 - 0 = 13{,}385\text{kN}$$

$$R_1 = 2{,}154 - (-18{,}615) = 20{,}769\text{kN}$$

$$R_2 = -0{,}820 - 2{,}154 = -2{,}974\text{kN}$$

$$R_3 = 0 - (-0{,}820) = 0{,}820\text{kN}$$

6. Comprobamos el equilibrio de la viga

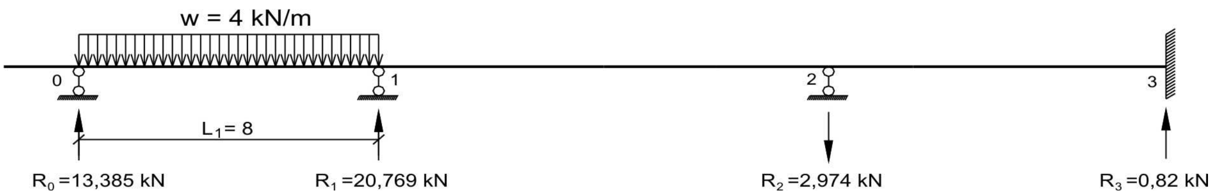


Fig. 4.25

$$\sum F_Y = -4.8 + 13{,}385 + 20{,}769 - 2{,}974 + 0{,}820 = 0$$

b) CARGA VIVA $w = 4\text{kN}/\text{m}$ **EN EL TRAMO** L_2

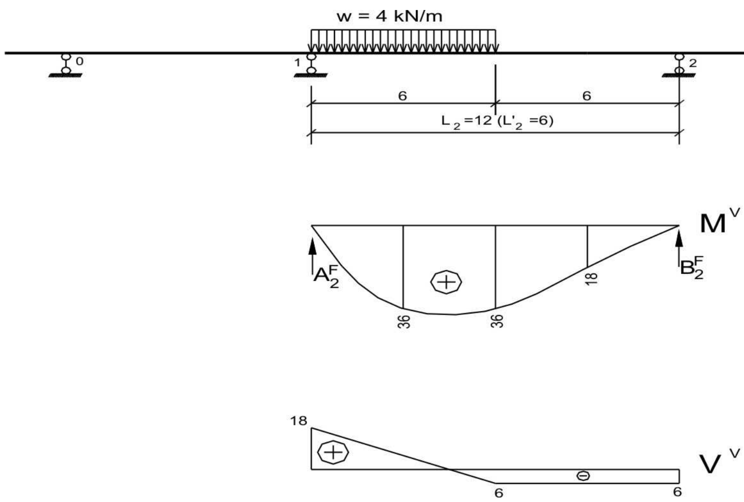


Fig. 4.26

$$\xi = \eta = 0{,}5$$

$$A_2^F = \frac{9}{384}wL^3 = \frac{9}{384}.4.12^3 = 162\text{kN.m}^2$$

$$B_2^F = \frac{7}{384} wL^3 = \frac{7}{384}.4.12^3 = 126kN.m^2$$

1. Calculamos los momentos en los apoyos

$$M_1 = -\frac{6}{12}.\frac{162.4{,}250 - 126}{5{,}333.4{,}250 - 1} = -12{,}982kN.m$$

$$M_2 = -\frac{6}{12}.\frac{126.5{,}333 - 162}{5{,}333.4{,}250 - 1} = -11{,}769kN.m$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3^{'}} = -\frac{(-11{,}769)}{2} = 5{,}884kN.m$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{(-12{,}982)}{\infty} = 0$$

2. Graficamos el diagrama final de momento flector

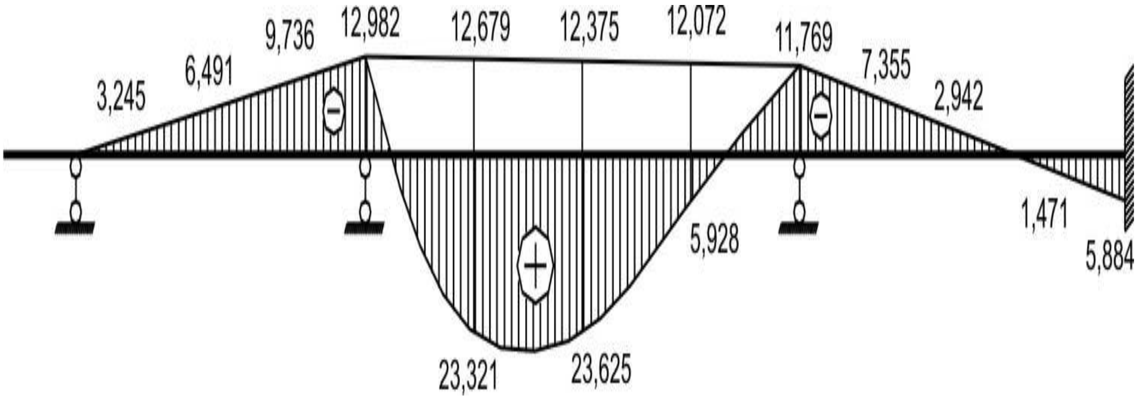


Fig. 4.27 Diagrama M_{II}

3. Realizamos la comprobación cinemática del cálculo

$$\Delta_{SII} = \sum \int_L \frac{M_S M_{II}}{EI} dx = -\frac{1}{0{,}8EI_0}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.12{,}982 + \frac{6}{6.2EI_0}(-1.12{,}982 + 4.1.23{,}321 +$$

$$+1.23{,}625) + \frac{1}{2EI_0}.1.6.5{,}929 - \frac{1}{EI_0}.1.9.2{,}942 = -\frac{43{,}273}{EI_0} + \frac{51{,}964}{EI_0} + \frac{17{,}787}{EI_0} - \frac{26{,}478}{EI_0} =$$

$$= -\frac{69{,}751}{EI_0} + \frac{69{,}751}{EI_0} = 0$$

4. Calculamos las fuerzas cortantes

$$V_{0-1} = V_{1-0} = \frac{(-12{,}982) - 0}{8} = -1{,}623kN$$

$$V_{1-2} = \frac{(-11{,}769) - (-12{,}982)}{12} + 18 = 18{,}101kN$$

$$V_{2-1} = \frac{(-11{,}769) - (-12{,}982)}{12} - 6 = -5{,}899kN$$

$$V_{2-3} = V_{3-2} = \frac{5{,}884 - (-11{,}769)}{9} = 1{,}961kN$$

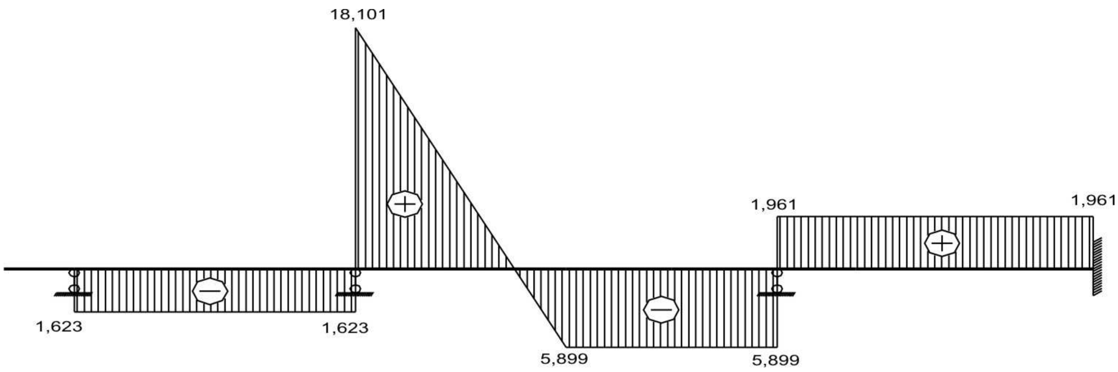


Fig. 4.28 Diagrama V_{II}

5. Calculamos las reacciones en los apoyos

$$R_0 = -1,623 - 0 = -1,623kN$$

$$R_1 = 18,101 - (-1,623) = 19,724kN$$

$$R_2 = 1,961 - (-5,899) = 7,860kN$$

$$R_3 = 0 - 1,961 = -1,961kN$$

6. Comprobamos el equilibrio de la viga

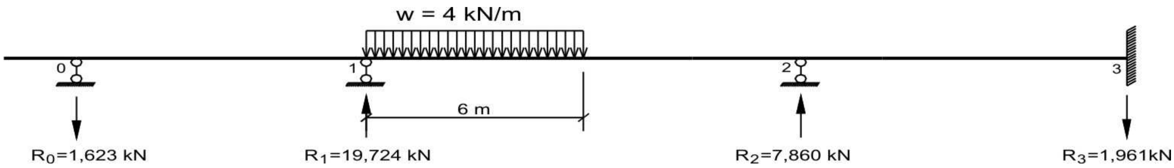


Fig. 4.29

$$\sum F_Y = -4.6 - 1,623 + 19,724 + 7,860 - 1,961 = 0$$

c) CARGA VIVA $P = 15kN$ **EN EL TRAMO** L_2

$$\xi = \frac{9}{12} = 0,75$$

$$\eta = \frac{3}{12} = 0,25$$

$$A_2^F = \frac{PL^2}{6}\xi(1-\xi)(2-\xi) = \frac{15.12^2}{6}.0,75(1-0,75)(2-0,75) = 84,375kN.m^2$$

$$B_2^F = \frac{PL^2}{6}\xi(1-\xi^2) = \frac{15.12^2}{6}.0,75(1-0,75^2) = 118,125kN.m^2$$

1. Calculamos los momentos en los apoyos

$$M_1 = -\frac{6}{12}.\frac{84,375.4,250 - 118,125}{5,333.4,250 - 1} = -5,550kN.m$$

$$M_2 = -\frac{6}{12}.\frac{118,125.5,333 - 84,375}{5,333.4,250 - 1} = -12,591kN.m$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3^{'}} = -\frac{(-12,591)}{2} = 6,296kN.m$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{(-5{,}550)}{\infty} = 0$$

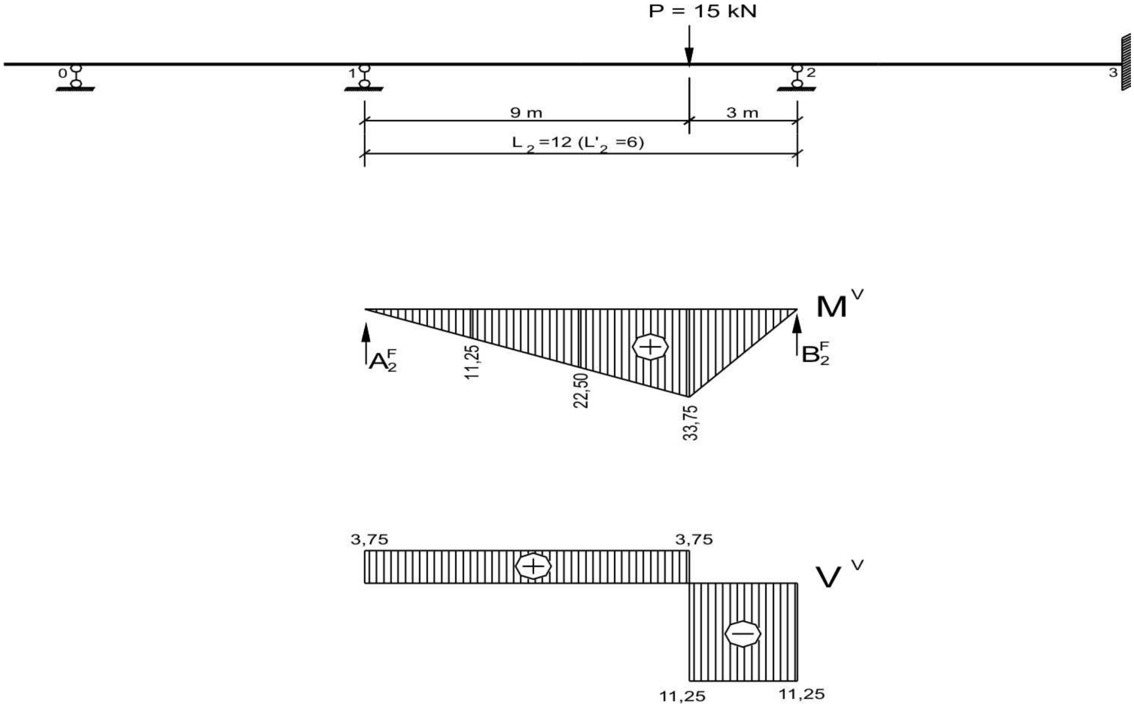


Fig. 4.30

2. Graficamos el diagrama final de momento flector

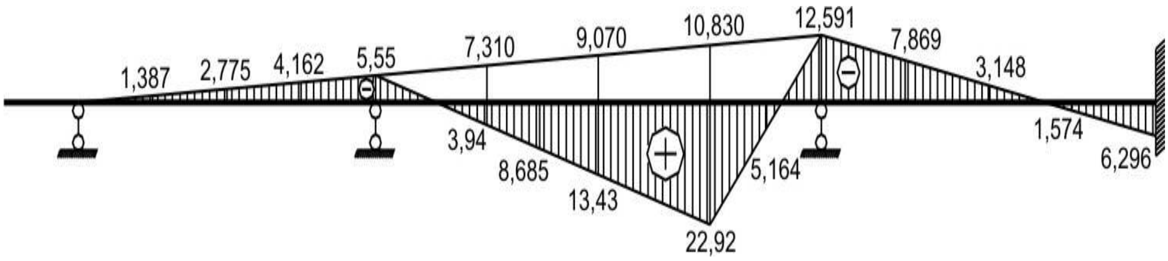


Fig. 4.31 Diagrama M_{III}

3. Realizamos la comprobación cinemática del cálculo

$$\Delta_{SIII} = \sum \int_L \frac{M_S M_{III}}{EI} dx = -\frac{1}{0{,}8EI_0}.\frac{1}{2}.1.8.\frac{2}{3}.5{,}550 + \frac{1}{2EI_0}.1.9.8{,}685 + \frac{1}{2EI_0}.1.3.5{,}164 -$$

$$-\frac{1}{EI_0}.1.9.3{,}148 = -\frac{18{,}50}{EI_0} + \frac{39{,}083}{EI_0} + \frac{7{,}746}{EI_0} - \frac{28{,}332}{EI_0} = \frac{46{,}829}{EI_0} - \frac{46{,}832}{EI_0} = -\frac{0{,}003}{EI_0} \approx 0$$

Error porcentual: $\varepsilon = \frac{0{,}003}{46{,}832}.100\% = 0{,}006\%$

4. Calculamos las fuerzas cortantes

$$V_{0-1} = V_{1-0} = \frac{(-5{,}550) - 0}{8} = -0{,}694kN$$

$$V_{1-2} = \frac{(-12{,}591) - (-5{,}550)}{12} + 3{,}75 = 3{,}163kN$$

$$V_{2-1} = \frac{(-12,591)-(-5,550)}{12} + (-11,25) = -11,837\text{kN}$$

$$V_{2-3} = V_{3-2} = \frac{6,296-(-12,591)}{9} = 2,098\text{kN}$$

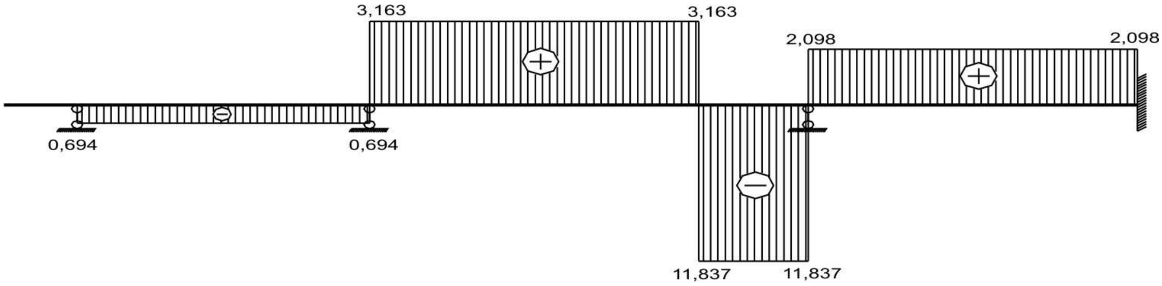


Fig. 4.32 Diagrama V_{III}

5. Calculamos las reacciones en los apoyos

$$R_0 = -0,694 - 0 = -0,694\text{kN}$$

$$R_1 = 3,163 - (-0,694) = 3,857\text{kN}$$

$$R_2 = 2,098 - (-11,837) = 13,935\text{kN}$$

$$R_3 = 0 - 2,098 = -2,098\text{kN}$$

6. Comprobamos el equilibrio de la viga



Fig. 4.33

$$\sum F_Y = -15 - 0,694 + 3,857 + 13,935 - 2,098 = 0$$

d) CARGA VIVA $M = 18\text{kN.m}$ **EN EL TRAMO** L_3

$$\xi = \frac{2,25}{9} = 0,25$$

$$\eta = \frac{6,75}{9} = 0,75$$

$$A_3^F = \frac{ML}{6}(3\eta^2 - 1) = -\frac{18.9}{6}(3.0,75^2 - 1) = -18,562\text{kN.m}^2$$

$$B_3^F = \frac{ML}{6}(1 - 3\xi^2) = -\frac{18.9}{6}(1 - 3.0,25^2) = -21,937\text{kN.m}^2$$

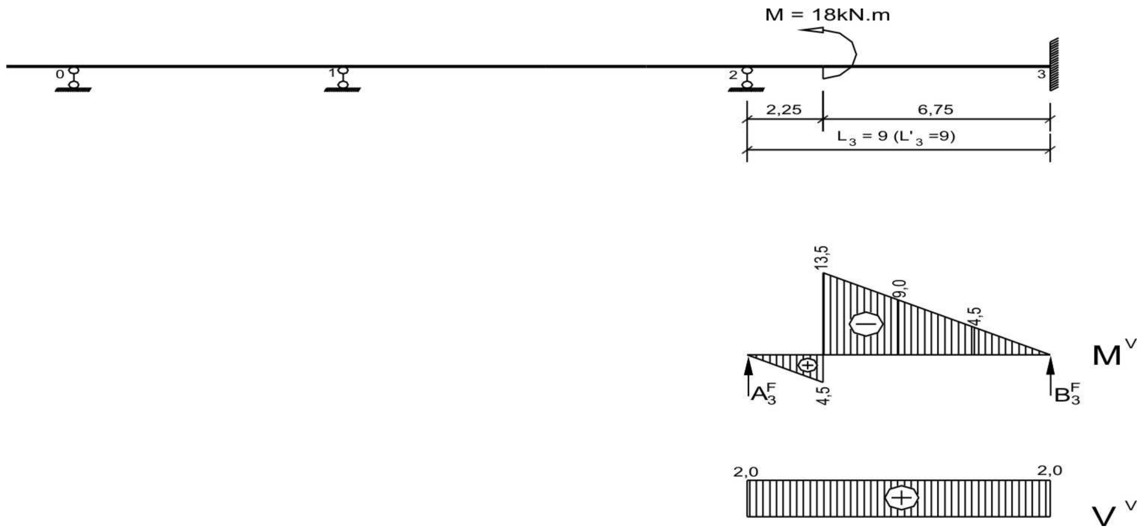


Fig. 4.34

1. Calculamos los momentos en los apoyos

$$M_2 = -\frac{6}{9}.\frac{(-18,562).2-(-21,937)}{3,208.2-1} = 1,869kN.m$$

$$M_3 = -\frac{6}{9}.\frac{(-21,937).3,208-(-18,562)}{3,208.2-1} = 6,378kN.m$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{K_2} = -\frac{1,869}{5,333} = -0,350kN.m$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{(-0,350)}{\infty} = 0$$

2. Graficamos el diagrama final de momento flector

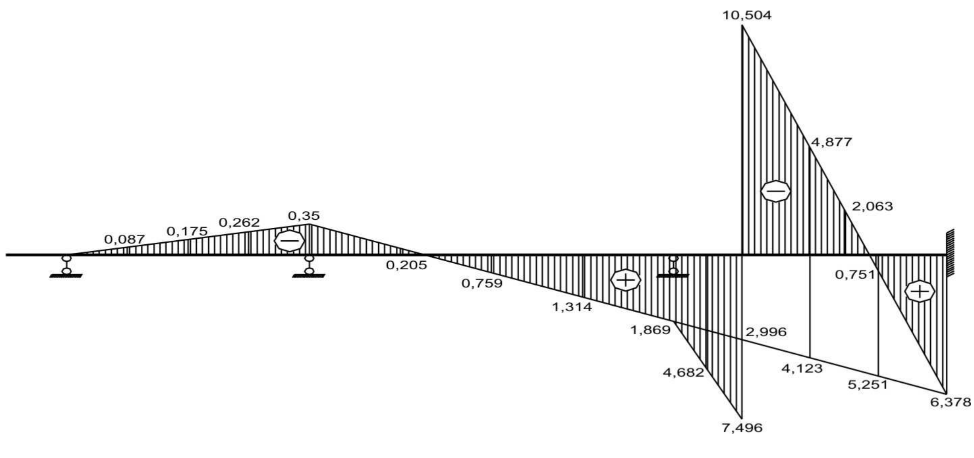


Fig. 4.35 Diagrama M_{IV}

3. Realizamos la comprobación cinemática del cálculo

$$\Delta_{SIV} = \sum\int_L \frac{M_S M_{IV}}{EI}dx = -\frac{1}{0,8EI_0}.\frac{1}{2}.0,350.8.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{2EI_0}.12.1.0,759+\frac{1}{EI_0}.2,25.1.4,682-$$

$$-\frac{1}{EI_0}.6,75.1.2,063 = -\frac{1,167}{EI_0}+\frac{4,554}{EI_0}+\frac{10,535}{EI_0}-\frac{13,925}{EI_0} = -\frac{15,092}{EI_0}+\frac{15,089}{EI_0} = -\frac{0,003}{EI_0} \approx 0$$

Error porcentual: $\varepsilon = \frac{0,003}{15,092}.100\% = 0,020\%$

4. Calculamos las fuerzas cortantes

$$V_{1-0} = V_{0-1} = \frac{(-0,350) - 0}{8} = -0,044kN$$

$$V_{1-2} = V_{2-1} = \frac{1,869 - (-0,350)}{12} = 0,185kN$$

$$V_{2-3} = V_{3-2} = \frac{6,378 - (1,869)}{9} + 2 = 2,501kN$$

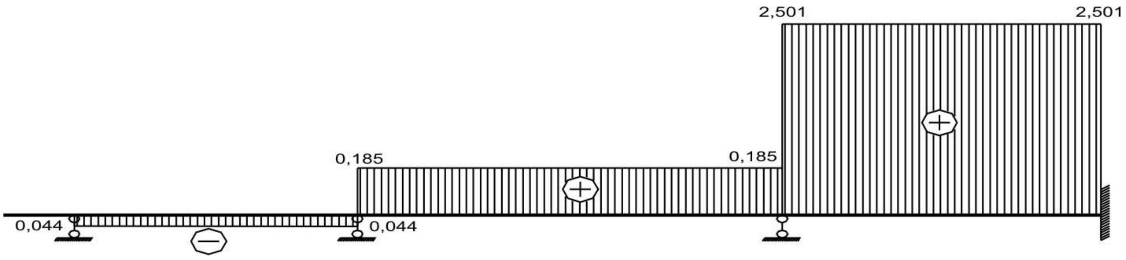


Fig. 4.36 Diagrama V_{IV}

5. Calculamos las reacciones en los apoyos

$$R_0 = -0,044 - 0 = -0,044kN$$

$$R_1 = 0,185 - (-0,044) = 0,229kN$$

$$R_2 = 2,501 - 0,185 = 2,316kN$$

$$R_3 = 0 - 2,501 = -2,501kN$$

6. Comprobamos el equilibrio de la viga

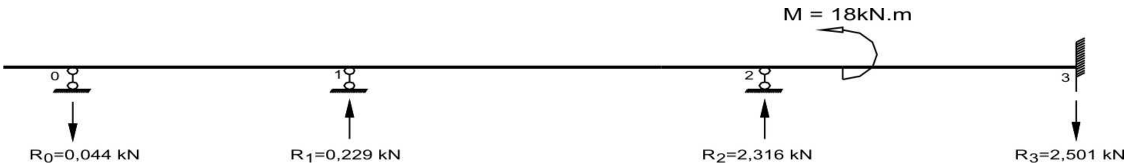


Fig. 4.37

$$\sum F_Y = -0,044 + 0,229 + 2,316 - 2,501 = 0$$

DIAGRAMA DE ENVOLVENTES

En la tabla 4.6 se muestran las fuerzas de cálculo en las secciones de la viga. Los diagramas de envolvente M_{env} y V_{env} se muestran en las figuras 4.38 y 4.39.

Tabla 4.6

Tipo de diagrama	L_0		L_1				
	0	1	0	0,25	0,50	0,75	1
M	0	-2,4	-2,4	2,618	2,835	-1,747	-11,130
M_I	0	0	0	18,770	21,539	8,309	-20,922
M_{II}	0	0	0	-3,245	-6,491	-9,736	-12,982
M_{III}	0	0	0	-1,387	-2,775	-4,162	-5,550
M_{IV}	0	0	0	-0,087	-0,175	-0,262	-0,350
$M_{máx}$	0	-2,4	-2,4	21,388	24,374	6,562	-11,130
M_{min}	0	-2,4	-2,4	-2,101	-6,606	-15,907	-50,934
V	0	-2,4	3,709	1,309	-1,091	-3,491	-5,891
V_I	0	0	13,385	5,385	-2,615	-10,615	-18,615
V_{II}	0	0	-1,623	-1,623	-1,623	-1,623	-1,623
V_{III}	0	0	-0,694	-0,694	-0,694	-0,694	-0,694
V_{IV}	0	0	-0,044	-0,044	-0,044	-0,044	-0,044
$V_{máx}$	0	-2,4	17,094	6,694	-1,091	-3,491	-5,891
V_{min}	0	-2,4	1,348	-1,052	-6,067	-16,467	-26,867

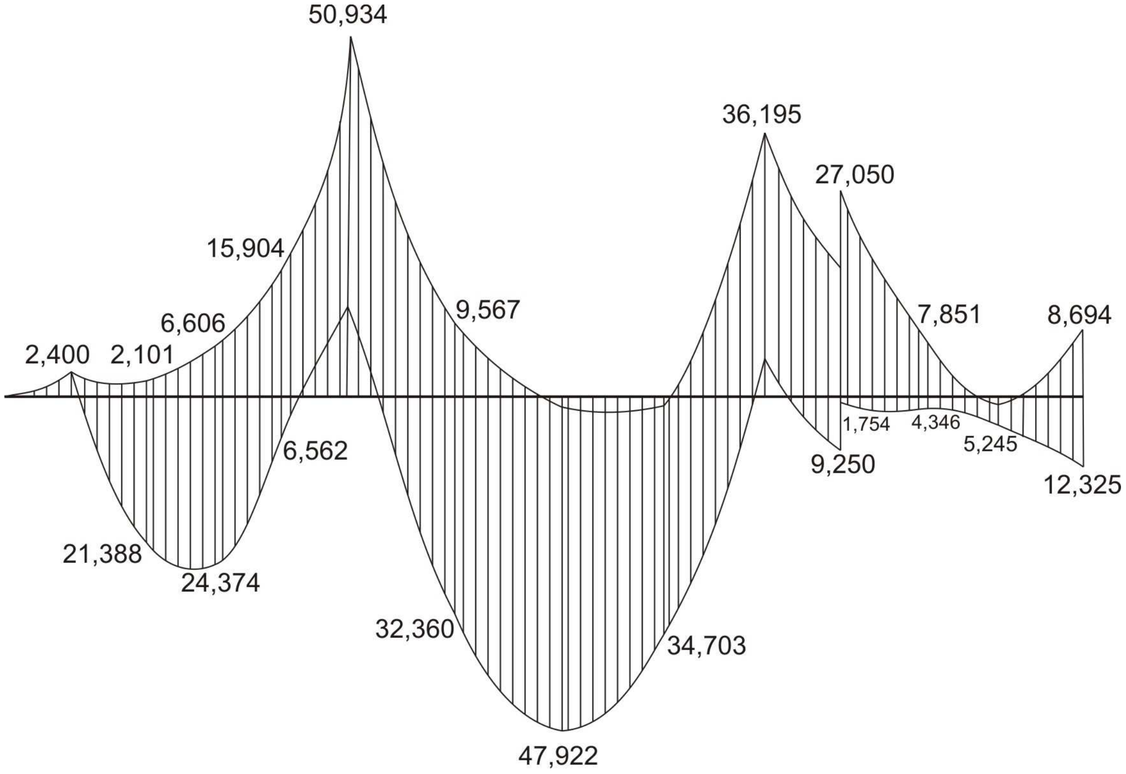


Fig. 4.38 Diagrama de envolvente M_{env}

Continuación de Tabla 4.6

Tipo de diagrama	L_2					L_3				
	0	0,25	0,50	0,75	1	0	0,25	0,50	0,75	1
M	-11,130	4,894	10,118	4,541	-11,835	-11,835	-1,322	3,116	1,479	-6,233
M_I	-20,922	-14,461	-8,000	-1,538	4,923	4,923	3,076	1,230	-0,615	-2,461
M_{II}	-12,982	23,321	23,625	5,928	-11,769	-11,769	-7,355	-2,942	1,471	5,884
M_{III}	-5,550	3,940	13,430	22,920	-12,591	-12,591	-7,869	-3,148	1,574	6,296
M_{IV}	-0,350	0,205	0,759	1,314	1,869	1,869	7,496 -10,504	-4,877	0,751	6,378
$M_{máx}$	-11,130	32,360	47,932	34,703	-5,043	-5,043	9,250 1,754	4,346	5,275	12,325
M_{min}	-50,934	-9,567	2,118	3,003	-36,195	-36,195	-16,546 -27,050	-7,851	0,864	-8,694
V	7,141	3,541	-0,059	-3,659	-7,259	6,022	3,322	0,622	-2,078	-4,778
V_I	2,154	2,154	2,154	2,154	2,154	-0,820	-0,820	-0,820	-0,820	-0,820
V_{II}	18,101	6,101	-5,899	-5,899	-5,899	1,961	1,961	1,961	1,961	1,961
V_{III}	3,163	3,163	3,163	3,163 -11,837	-11,837	2,098	2,098	2,098	2,098	2,098
V_{IV}	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	2,501	2,501	2,501	2,501	2,501
$V_{máx}$	30,744	15,144	5,443	1,843 -1,320	-4,920	12,582	9,882	7,182	4,482	1,782
V_{min}	7,141	3,541	-5,958	-9,558 -21,395	-24,995	5,202	2,502	-0,198	-2,898	-5,598

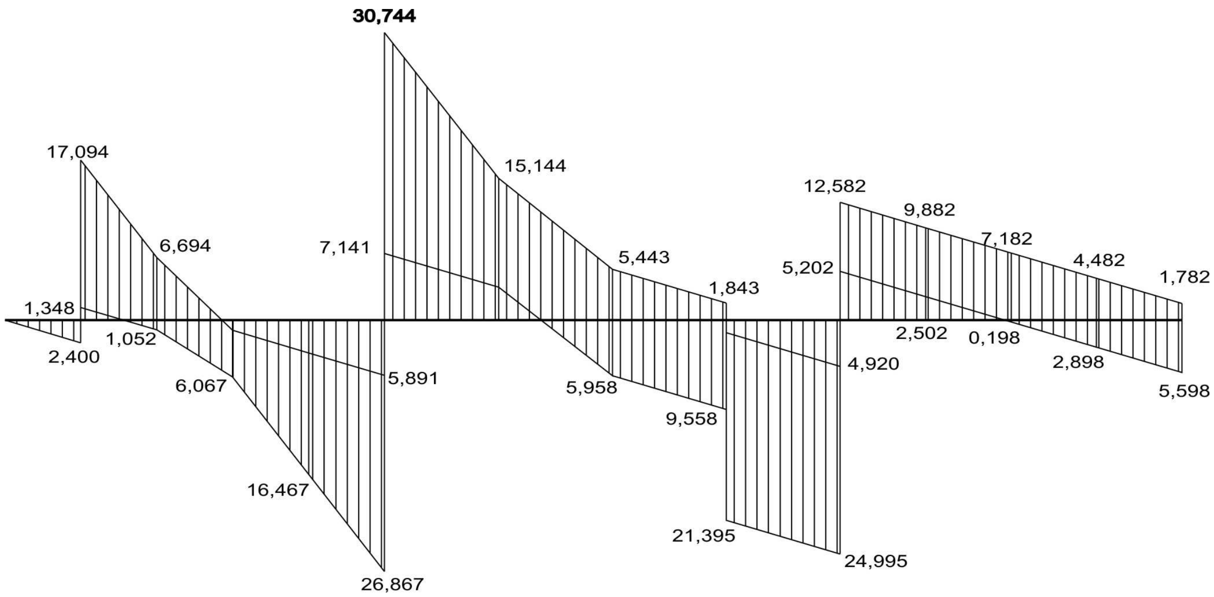


Fig. 4.39 Diagrama de envolvente V_{env}

DIAGRAMAS DE LINEAS DE INFLUENCIA

a) LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS EN LOS APOYOS

Para graficar las líneas de influencia de los momentos en los apoyos ubicamos la carga unitaria $P=1$ en cada uno de los tramos de la viga y calculamos los momentos en los apoyos, a través de las fórmulas 4.18 – 4.21, 4.4 – 4.5.

1. Cuando la carga $P=1$ se encuentra en el voladizo L_0 (figura 4.40)

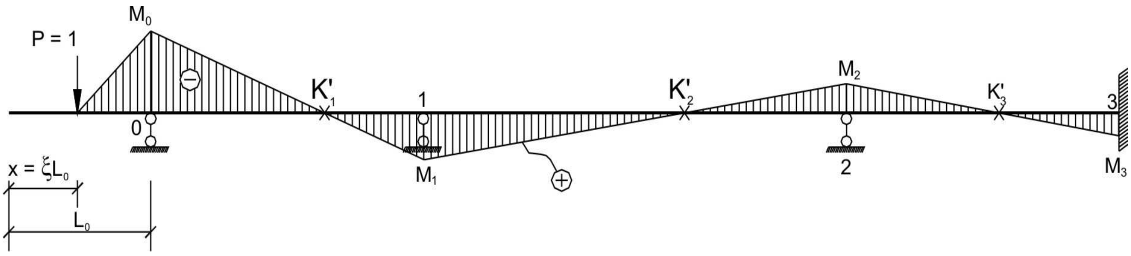


Fig. 4.40

$$M_0 = -1(L_0 - x) = -L_0(1-\xi) = -2(1-\xi)$$

$$M_1 = -\frac{M_0}{K_1'} = -\frac{M_0}{3{,}059}$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{K_2'} = -\frac{M_1}{4{,}250}$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3'} = -\frac{M_2}{2}$$

El cálculo se muestra en la tabla 4.7.

Tabla 4.7

ξ	M_0	M_1	M_2	M_3
0	-2	0,6538	-0,1538	0,0769
0,5	-1	0,3269	-0,0769	0,0384
1	0	0	0	0

2. Cuando la carga $P=1$ se encuentra en el tramo L_1 (figura 4.41)

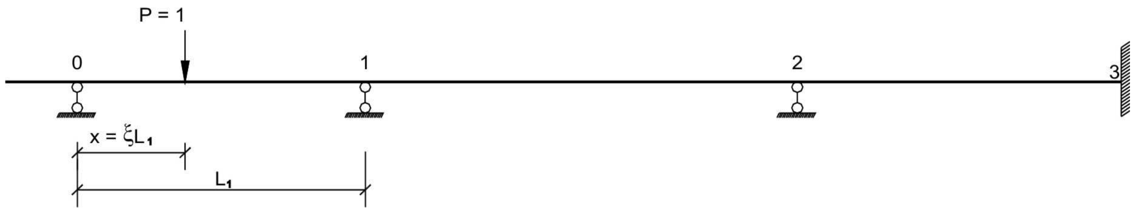


Fig. 4.41

$$M_0 = M_{izq} = -\frac{L_1}{K_1 - \frac{1}{K_1'}}\left(v - u.\frac{1}{K_1'}\right) = -\frac{8}{\infty - \frac{1}{3{,}059}}\left(v - u.\frac{1}{3{,}059}\right) = 0$$

$$M_1 = M_{der} = -\frac{L_1}{K_1' - \frac{1}{K_1}}\left(u - v.\frac{1}{K_1}\right) = -\frac{8}{3{,}059 - \frac{1}{\infty}}\left(u - v.\frac{1}{\infty}\right) = -2{,}615u$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{K_2'} = -\frac{M_1}{4{,}250}$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3'} = -\frac{M_2}{2}$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.8.

Tabla 4.8

ξ	u	M_1	M_2	M_3
0	0	0	0	0
0,25	0,2344	-0,6130	0,1442	-0,0721
0,5	0,3750	-0,9806	0,2307	-0,1154
0,75	0,3281	-0,8580	0,2019	-0,1009
1	0	0	0	0

3. Cuando la carga $P = 1$ se encuentra en el tramo L_2 (figura 4.42)

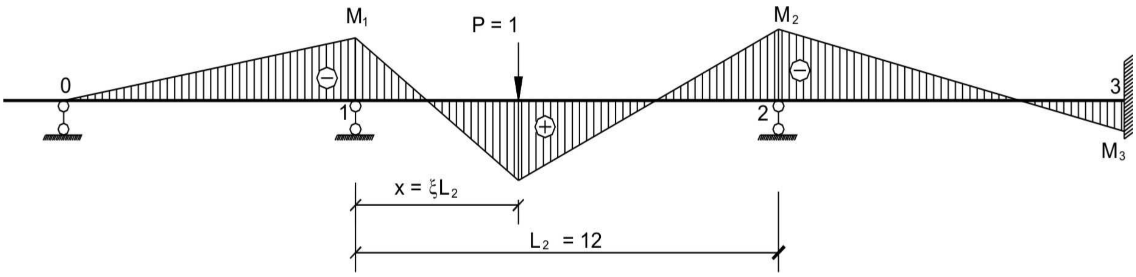


Fig. 4.42

$$M_1 = M_{izq} = -\frac{L_2}{K_2 K_2' - 1}\left(vK_2' - u\right) = -\frac{12}{5{,}333.4{,}250 - 1}\left(v.4{,}250 - u\right) = -2{,}354v + 0{,}554u$$

$$M_2 = M_{der} = -\frac{L_2}{K_2 K_2' - 1}\left(uK_2 - v\right) = -\frac{12}{5{,}333.4{,}250 - 1}\left(u.5{,}333 - v\right) = -2{,}954u + 0{,}554v$$

$$M_0 = 0$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{K_3'} = -\frac{M_2}{2}$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.9.

Tabla 4.9

ξ	u	v	Cálculo de M_1			Cálculo de M_2			$M_3 = -\frac{M_2}{2}$
			$-2{,}354v$	$0{,}554u$	M_1	$-2{,}954u$	$0{,}554v$	M_2	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,2344	0,3281	-0,772	0,130	-0,642	-0,692	0,182	-0,510	0,255
0,5	0,3750	0,3750	-0,883	0,208	-0,675	-1,108	0,208	-0,900	0,450
0,75	0,3281	0,2344	-0,552	0,182	-0,370	-0,969	0,130	-0,839	0,419
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Cuando la carga $P=1$ se encuentra en el tramo L_3 (figura 4.43)

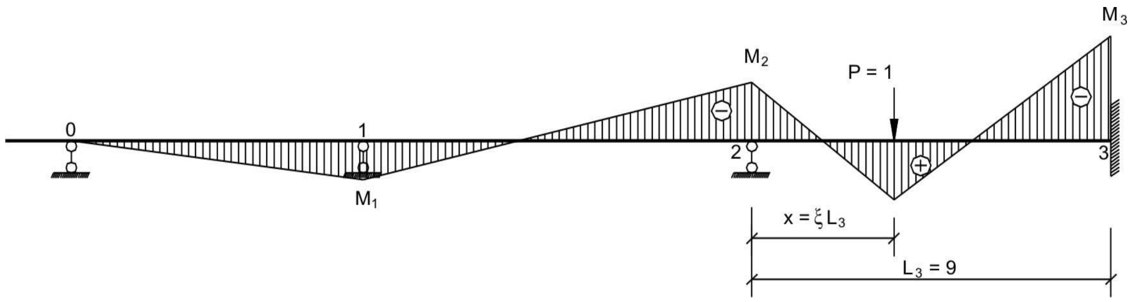


Fig. 4.43

$$M_2 = M_{izq} = -\frac{L_3}{K_3K_3^{'}-1}\left(vK_3^{'}-u\right) = -\frac{9}{3{,}208.2-1}(v.2-u) = -3{,}323v + 1{,}662u$$

$$M_3 = M_{der} = -\frac{L_3}{K_3K_3^{'}-1}\left(uK_3-v\right) = -\frac{9}{3{,}208.2-1}(u.3{,}208-v) = -5{,}331u + 1{,}662v$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{K_2} = -\frac{M_2}{5{,}333}$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{M_1}{\infty} = 0$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.10.

Tabla 4.10

ξ	u	v	Cálculo de M_2			Cálculo de M_3			$M_1 = -\frac{M_2}{5{,}333}$
			$-3{,}323v$	$1{,}662u$	M_2	$-5{,}331u$	$1{,}662v$	M_3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,2344	0,3281	-1,090	0,389	-0,701	-1,249	0,545	-0,704	0,131
0,5	0,3750	0,3750	-1,246	0,623	-0,623	-1,999	0,623	-1,376	0,117
0,75	0,3281	0,2344	-0,779	0,545	-0,234	-1,749	0,389	-1,360	0,044
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5. Por las ordenadas, calculadas en las tablas 4.7 – 4.10, graficamos las líneas de influencia de los momentos en los apoyos (figuras 4.44 – 4.47).

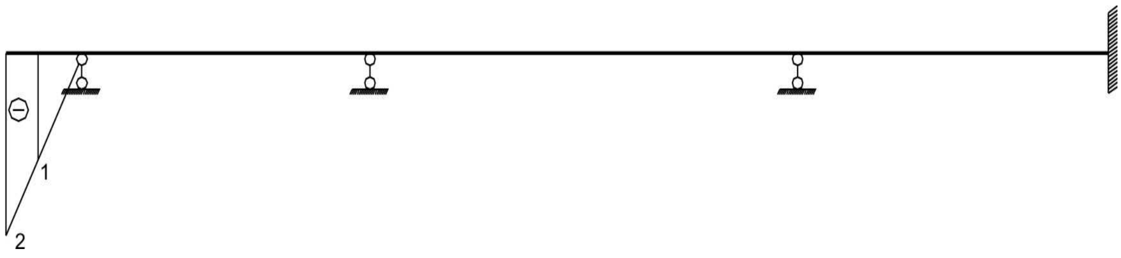


Fig. 4.44 Línea de influencia M_0

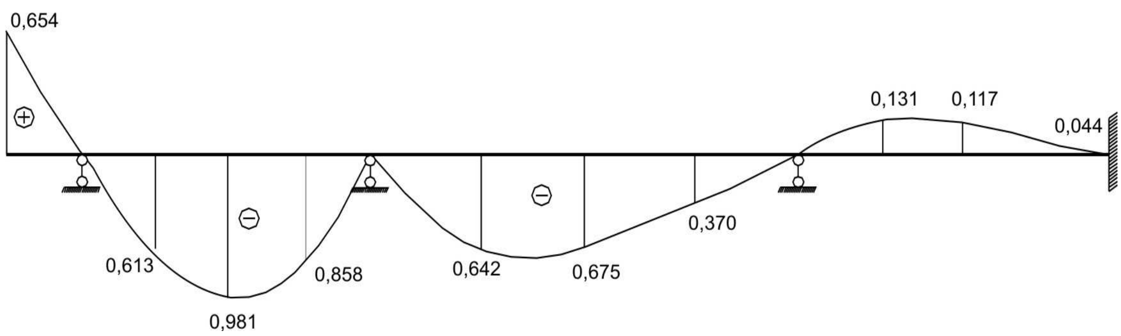


Fig. 4.45 Línea de influencia M_1

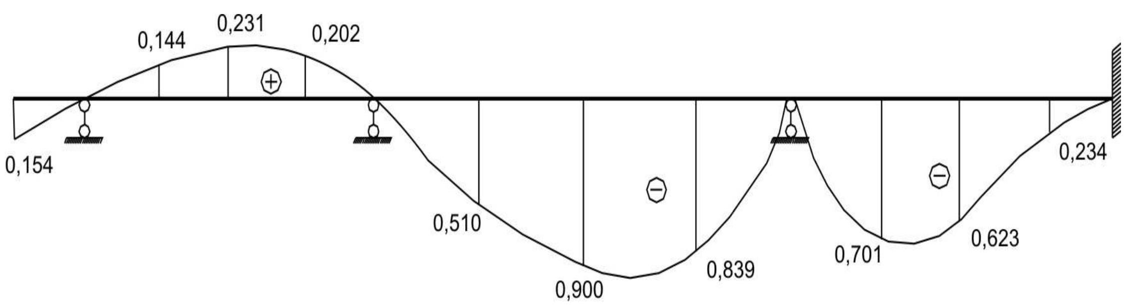


Fig. 4.46 Línea de influencia M_2

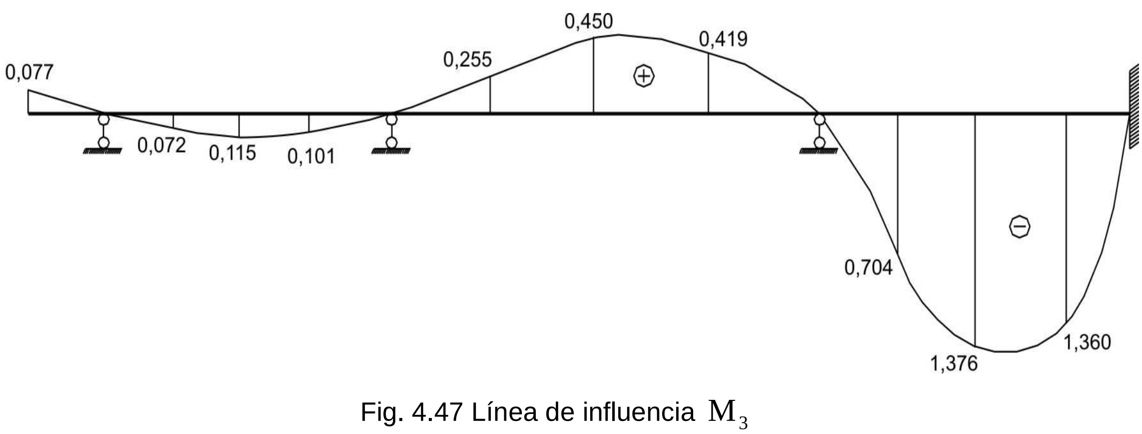


Fig. 4.47 Línea de influencia M_3

6. Cargamos las líneas de influencia por medio de la carga distribuida

Para comprobar la correcta diagramación de las líneas de influencia, con su ayuda calcularemos los momentos en los apoyos, debido a una carga cualquiera, por ejemplo la carga distribuida. En otras palabras, cargaremos las líneas de influencia de los momentos en los apoyos, por medio de la carga muerta $g = 1,2kN/m$ (figura 4.10, a). Para ello, será necesario calcular las áreas de las líneas de influencia de toda la viga y multiplicarlo por la intensidad de la carga g. Para calcular las áreas formadas por las curvas, utilizaremos la fórmula de Simpson.

$$M_1 = gA_{1g} = 1,2\left[\frac{1}{2}.0,654.2 - \frac{8}{3.4}(0 + 4.0,613 + 2.0,981 + 4.0,858 + 0) - \right.$$

$$\left. - \frac{12}{3.4}(0 + 4.0,642 + 2.0,675 + 4.0,370 + 0) + \frac{9}{3.4}(0 + 4.0,131 + 2.0,117 + 4.0,044 + 0)\right]$$

$$M_1 = -11,129kN.m$$

$$M_2 = gA_{2g} = 1,2\left[-\frac{1}{2}.0,154.2 + \frac{8}{3.4}(0 + 4.0,144 + 2.0,231 + 4.0,202 + 0) - \right.$$

$$\left. - \frac{12}{3.4}(0 + 4.0,510 + 2.0,900 + 4.0,839 + 0) - \frac{9}{3.4}(0 + 4.0,701 + 2.0,623 + 4.0,234 + 0)\right]$$

$$M_2 = -11,831kN.m$$

$$M_3 = gA_{3g} = 1,2\left[\frac{1}{2}.0,077.2 - \frac{8}{3.4}(0 + 4.0,072 + 2.0,115 + 4.0,101 + 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{3.4}(0 + 4.0,255 + 2.0,450 + 4.0,419 + 0) - \frac{9}{3.4}(0 + 4.0,704 + 2.1,376 + 4.1,360 + 0)\right]$$

$$M_3 = -6,237kN.m$$

Los resultados obtenidos los comparamos con los efectuados ante la carga muerta (figura 4.17), los cuales se muestran en la tabla 4.11.

Tabla 4.11

Método de cálculo	M_1	M_2	M_3
Método de los momentos focales	-11,130	-11,835	-6,233
Líneas de influencia	-11,129	-11,831	-6,237
Error porcentual	0,009%	0,034%	0,064%

b) LINEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR EN LA SECCION "K"

El momento flector en el tramo de la viga (figura 4.48) se expresa a través de las líneas de influencia de los momentos en los apoyos en los extremos de este tramo, por medio de la fórmula 4.13, que tiene la siguiente forma:

$$M_K = \frac{L_i - x}{L_i} M_{i-1} + \frac{x}{L_i} M_i + M_K^v$$

Donde:

M_K^v - línea de influencia del momento flector en la sección "K" de la viga simplemente apoyada.

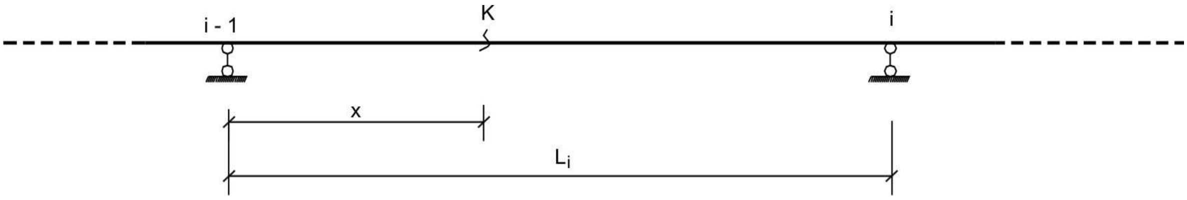


Fig. 4.48

Por dato del problema, el punto "K" se encuentra a una distancia $x = 3m$ del apoyo 1, tal como se muestra en la figura 4.49.

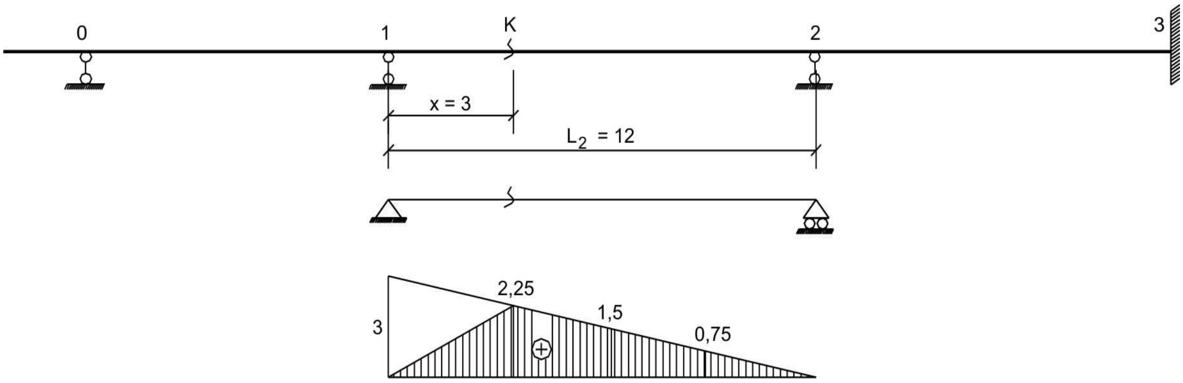


Fig. 4.49

Siendo M_{i-1} y M_i las líneas de influencia de los momentos en los apoyos y $M_{i-1} = M_1$, $M_i = M_2$, graficados en las figuras 4.45 y 4.46.

De esta manera, la línea de influencia del momento flector en la sección "K" de la viga continua se determinará por la fórmula:

$$L.I.M_K = \frac{9}{12}L.I.M_1 + \frac{3}{12}L.I.M_2 + L.I.M_K^v$$

El cálculo se muestra en la tabla 4.12 y el gráfico de la línea de influencia en la figura 4.50.

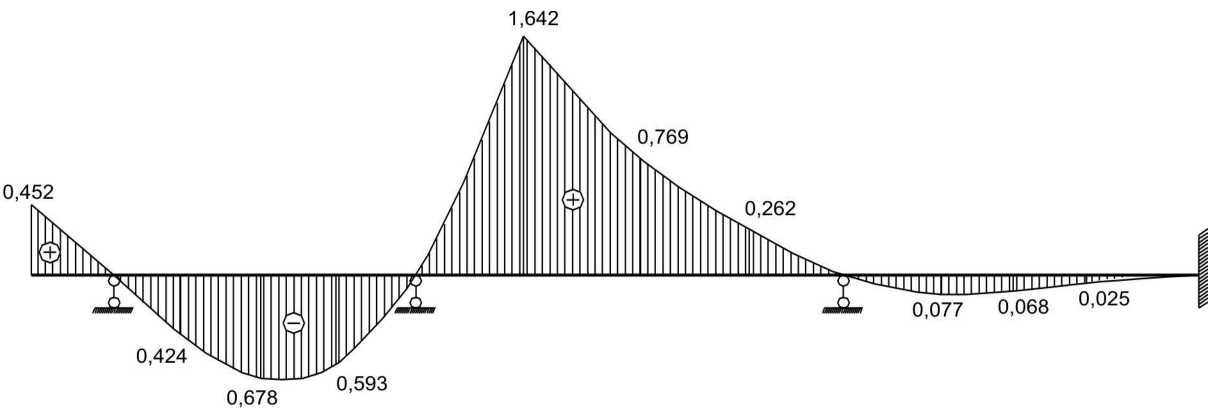


Fig. 4.50 Línea de influencia M_K

Tabla 4.12

L	ξ	M_1	M_2	$\frac{9}{12}M_1$	$\frac{3}{12}M_2$	M_K^v	M_K
L_0	0	0,654	-0,154	0,490	-0,038	0	0,452
	1	0	0	0	0	0	0
L_1	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,613	0,144	-0,460	0,036	0	-0,424
	0,5	-0,981	0,231	-0,736	0,058	0	-0,678
	0,75	-0,858	0,202	-0,643	0,050	0	-0,593
	1	0	0	0	0	0	0
L_2	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,642	-0,510	-0,481	-0,127	2,25	1,642
	0,5	-0,675	-0,900	-0,506	-0,225	1,50	0,769
	0,75	-0,370	-0,839	-0,278	-0,210	0,75	0,262
	1	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0,131	-0,701	0,098	-0,175	0	-0,077
	0,5	0,117	-0,623	0,088	-0,156	0	-0,068
	0,75	0,044	-0,234	0,033	-0,058	0	-0,025
	1	0	0	0	0	0	0

Ahora cargamos la línea de influencia M_K por medio de la carga muerta $g = 1{,}2\text{kN}/\text{m}$ (figura 4.10, a). Las áreas de los tramos curvos lo calculamos por la fórmula del trapecio.

$$M_K = gA_{Mg} = 1{,}2\left[\frac{1}{2}.0{,}452.2 - \frac{8}{4}(0 + 0{,}424 + 0{,}678 + 0{,}593 + 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{4}(0 + 1{,}642 + 0{,}769 + 0{,}262 + 0) - \frac{9}{4}(0 + 0{,}077 + 0{,}068 + 0{,}025 + 0)\right] = 5{,}638\text{kN.m}$$

Del cálculo ante la carga muerta (figura 4.17), el momento flector en la sección "K" es:

$$M_K = 4{,}894\text{kN.m}$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{5{,}638 - 4{,}894}{4{,}894}.100\% = 15{,}2\%$$

Hace falta indicar, que el error porcentual puede ser alto, debido a la aproximación de las fórmulas de integración numérica.

c) LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA CORTANTE EN LA SECCION "K"

La fuerza cortante en el tramo de la viga se puede expresar a través de los momentos en los apoyos en los extremos de este tramo, por medio de la fórmula 4.14, la cual tiene la forma:

$$V_K = \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} + V_K^v$$

Donde:

V_K^v - línea de influencia de la fuerza cortante en la sección "K" de la viga simplemente apoyada (figura 4.51).

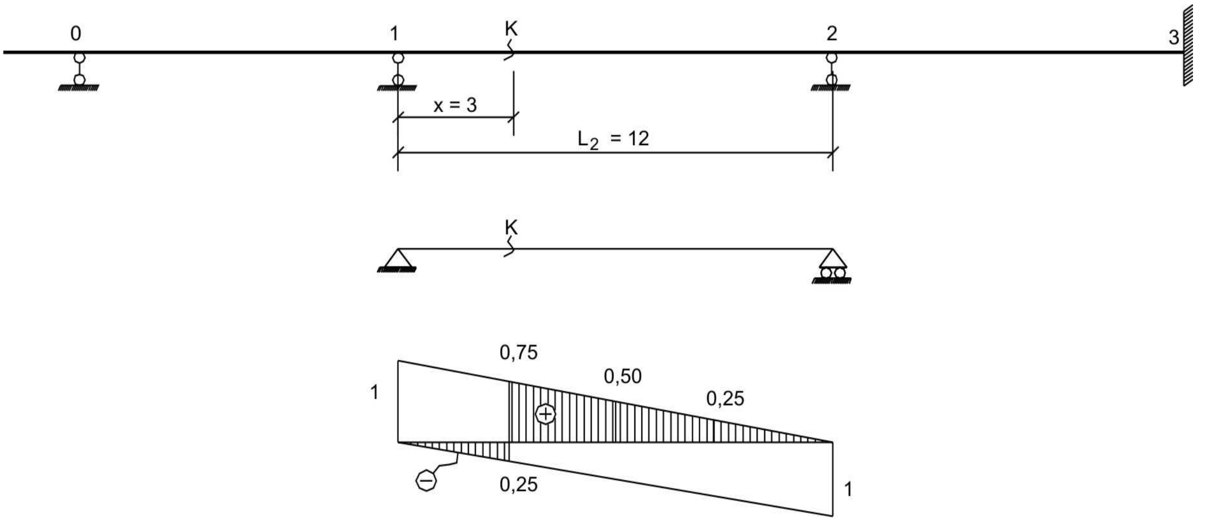


Fig. 4.51

Las magnitudes M_i y M_{i-1} vienen a ser las líneas de influencia de los momentos en los apoyos M_2 y M_1, quedando, de esta manera, la fórmula de cálculo la siguiente:

$$L.I.V_K = \frac{1}{12}\left(L.I.M_2 - L.I.M_1\right) + L.I.V_K^v$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.13 y el gráfico de la línea de influencia en la figura 4.52.

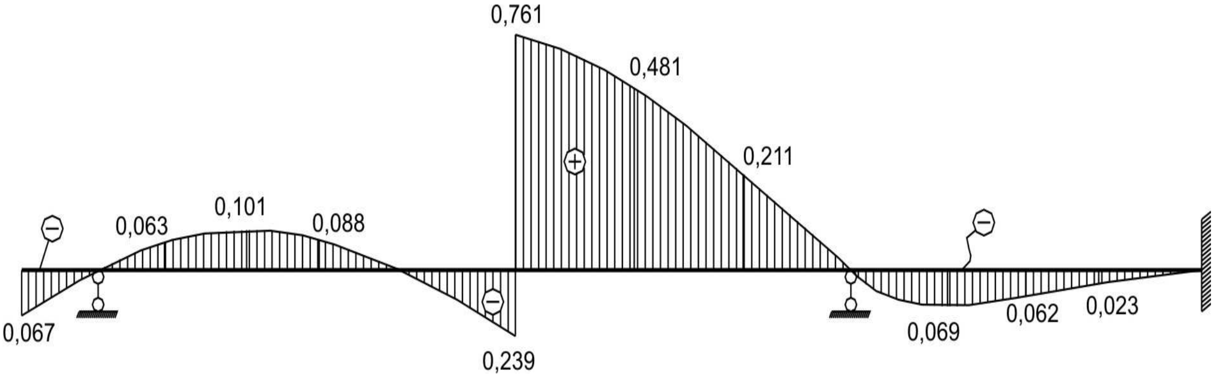


Fig. 4.52 Línea de influencia V_K

Luego, cargamos la línea de influencia V_K por medio de la carga muerta $g = 1{,}2kN/m$ (figura 4.10, a). Las áreas de los tramos curvos lo calculamos por la fórmula del trapecio.

$$V_K = gA_{Vg} = 1{,}2\left[-\frac{1}{2}.0{,}067.2 + \frac{8}{4}(0 + 0{,}063 + 0{,}101 + 0{,}088 + 0) - \frac{1}{2}.0{,}239.3 + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{3}\left(\frac{0{,}761}{2} + 0{,}481 + 0{,}211 + 0\right) - \frac{9}{4}(0 + 0{,}069 + 0{,}062 + 0{,}023 + 0)\right] = 3{,}539kN$$

La fuerza cortante en la sección "K", determinada por medio de la carga muerta (figura 4.19) es:

$$V_K = 3{,}541kN$$

Luego, el error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{3{,}541 - 3{,}539}{3{,}541}.100\% = 0{,}06\%$$

Tabla 4.13

L	ξ	M_1	M_2	$-\frac{1}{12}M_1$	$+\frac{1}{12}M_2$	V_K^v	V_K
L_0	0	0,654	-0,154	-0,054	-0,013	0	-0,067
	1	0	0	0	0	0	0
L_1	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,613	0,144	0,051	0,012	0	0,063
	0,5	-0,981	0,231	0,082	0,019	0	0,101
	0,75	-0,858	0,202	0,071	0,017	0	0,088
	1	0	0	0	0	0	0
L_2	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,642	-0,510	0,053	-0,042	-0,25	-0,239
						0,75	0,761
	0,5	-0,675	-0,900	0,056	-0,075	0,50	0,481
	0,75	-0,370	-0,839	0,031	-0,070	0,25	0,211
	1	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0,131	-0,701	-0,011	-0,058	0	-0,069
	0,5	0,117	-0,623	-0,010	-0,052	0	-0,062
	0,75	0,044	-0,234	-0,004	-0,019	0	-0,023
	1	0	0	0	0	0	0

d) LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS

Las reacciones en los apoyos se determinan como la diferencia entre las fuerzas cortantes a la izquierda y derecha del apoyo respectivo, utilizando la fórmula 4.15, la cual tiene la forma:

$$R_i = V_{der} - V_{izq}$$

Donde:

V_{der}, V_{izq} - líneas de influencia de las fuerzas cortantes en la viga continua, para las secciones ubicadas muy cerca de la derecha e izquierda del mencionado apoyo.

LINEA DE INFLUENCIA R_0 EN EL APOYO EXTREMO

La fuerza cortante en el tramo L_1 (a la derecha del apoyo) se determinará por medio de la dependencia:

$$V_{der} = \frac{M_1 - M_0}{L_1} + V^v_{der,0}$$

Donde:

M_1 y M_0 - líneas de influencia de los momentos en los apoyos, mostrados en las figuras 4.44 y 4.45.

$V^{v}_{der,0}$ - línea de influencia en la viga estáticamente determinada de longitud $L_1 = 8m$ en la sección ubicada muy cerca al apoyo 0 (figura 4.53, a).

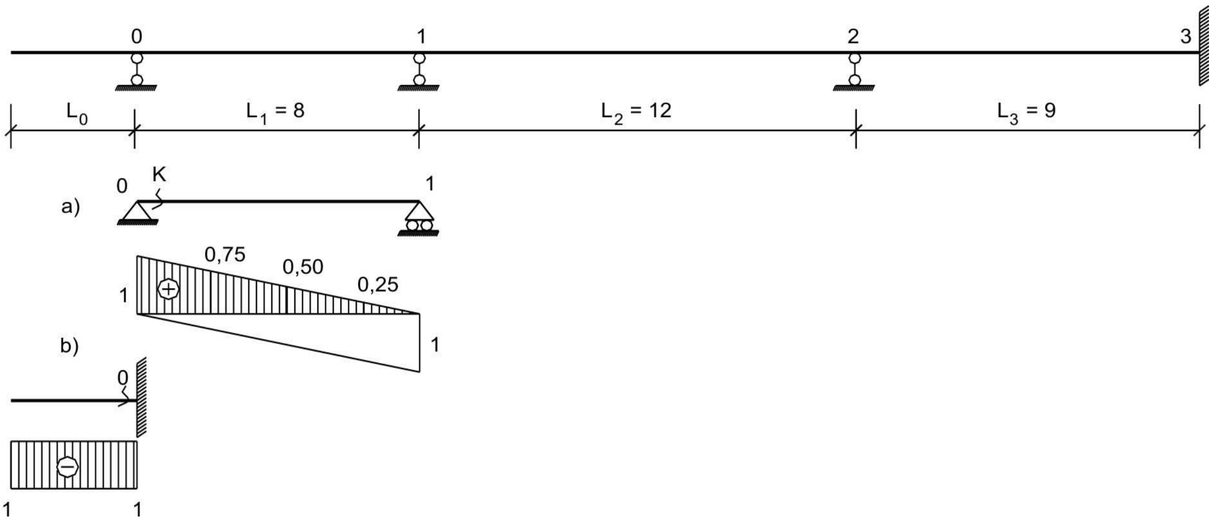


Fig. 4.53

La fuerza cortante en el tramo L_0 (izquierda del apoyo), viene a estar dado por la fuerza en el voladizo:

$$V_{izq} = V^{v}_{izq,0}$$

La línea de influencia de la fuerza cortante en la sección ubicada muy cerca del apoyo 0 de la viga en voladizo, se muestra en la figura 4.53, b.

De esta manera:

$$L.I.R_0 = L.I.V_{der} - L..I.V_{izq} = \frac{1}{8}\left(L.I.M_1 - L.I.M_0\right) + L.I.V^{v}_{der,0} - L.I.V^{v}_{izq,0}$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.14 y el gráfico de la línea de influencia en la figura 4.54.

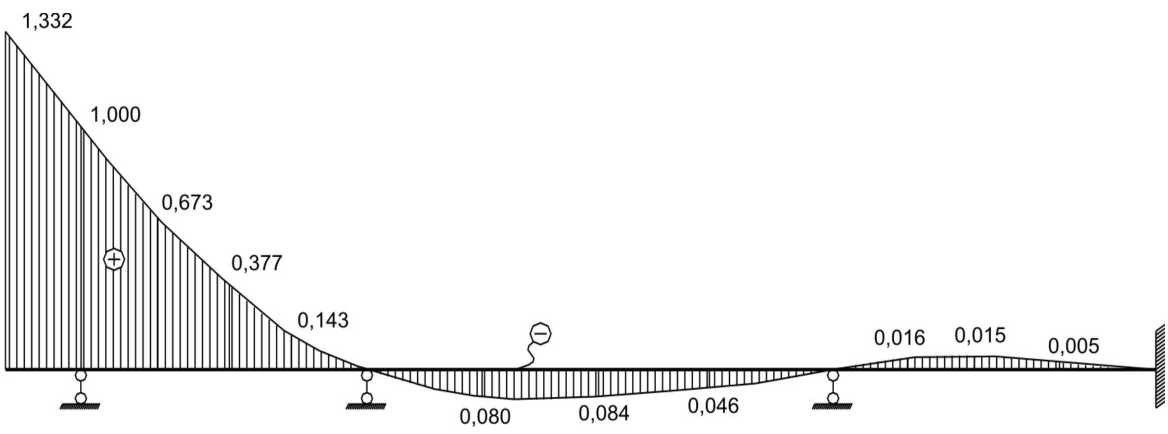


Fig. 4.54 Línea de influencia R_0

Tabla 4.14

L	ξ	M_0	M_1	$\frac{M_1 - M_0}{8}$	$V^v_{der,0}$	$-V^v_{izq,0}$	R_0
L_0	0	-2	0,654	0,332	0	1	1,332
	1	0	0	0	0	1	1
L_1	0	0	0	0	1	0	1
	0,25	0	-0,613	-0,077	0,75	0	0,673
	0,5	0	-0,981	-0,123	0,50	0	0,377
	0,75	0	-0,858	-0,107	0,25	0	0,143
	1	0	0	0	0	0	0
L_2	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0	-0,642	-0,080	0	0	-0,080
	0,5	0	-0,675	-0,084	0	0	-0,084
	0,75	0	-0,370	-0,046	0	0	-0,046
	1	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0	0,131	0,016	0	0	0,016
	0,5	0	0,117	0,015	0	0	0,015
	0,75	0	0,044	0,005	0	0	0,005
	1	0	0	0	0	0	0

Luego cargamos la línea de influencia R_0 por medio de la carga muerta $g = 1{,}2kN/m$ (figura 4.10, a). Las áreas de los tramos curvos lo calculamos por la fórmula del trapecio.

$$R_0 = gA_{R_0g} = 1{,}2\left[\frac{1{,}332+1}{2}.2 + \frac{8}{4}\left(\frac{1}{2} + 0{,}673 + 0{,}377 + 0{,}143 + 0\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{12}{4}(0 + 0{,}080 + 0{,}084 + 0{,}046 + 0) + \frac{9}{4}(0 + 0{,}016 + 0{,}015 + 0{,}005 + 0)\right] = 6{,}203kN$$

Del cálculo ante la carga muerta (figura 4.20), la reacción en el apoyo 0 es:

$$R_0 = 6{,}109kN$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{6{,}203 - 6{,}109}{6{,}109}.100\% = 1{,}5\%$$

LINEA DE INFLUENCIA R_1 EN EL APOYO INTERMEDIO

La fuerza cortante a la derecha e izquierda del apoyo se determinará por las fórmulas:

$$V_{der} = \frac{M_2 - M_1}{L_2} + V^v_{der,1}$$

$$V_{izq} = \frac{M_1 - M_0}{L_1} + V^v_{izq,1}$$

Las magnitudes $V^{v}_{der,1}$ y $V^{v}_{izq,1}$ vienen a ser las líneas de influencia de las fuerzas cortantes, graficadas muy cerca del apoyo 1, correspondientes a los tramos de la derecha e izquierda del mencionado apoyo, en las vigas estáticamente determinadas, mostradas en la figura 4.55.

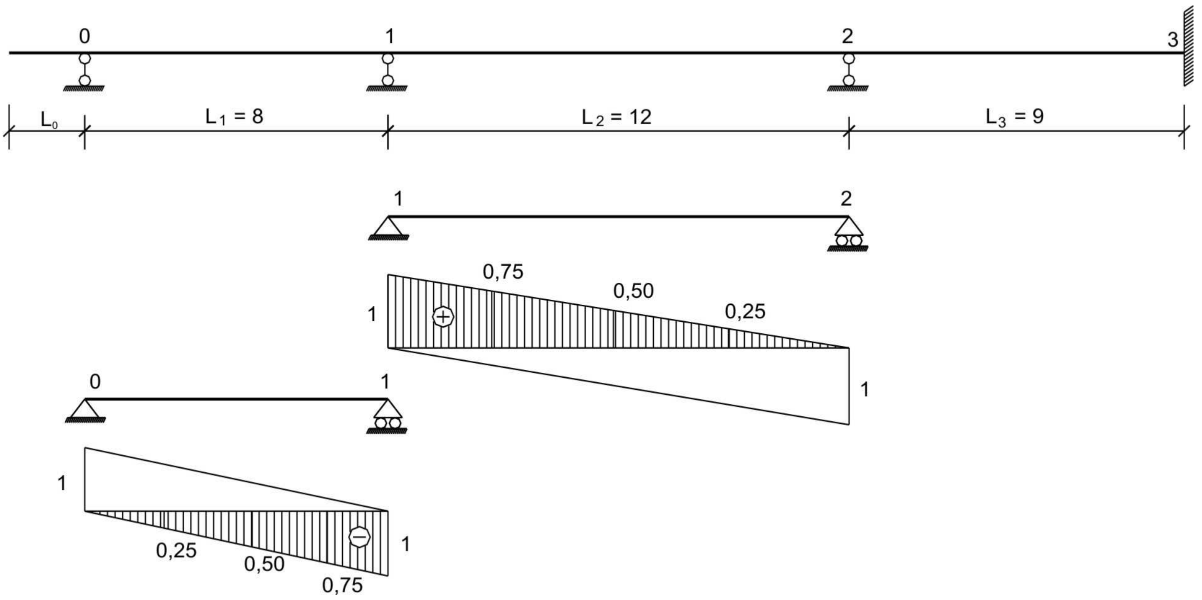


Fig. 4.55

De esta manera, la línea de influencia de la reacción R_1 se determinará por medio de la siguiente fórmula:

$$L.I.R_1 = L.I.V_{der} - L.I.V_{izq} = \frac{1}{12}\left(L.I.M_2 - L.I.M_1\right) - \frac{1}{8}\left(L.I.M_1 - L.I.M_0\right) + L.I.V^{v}_{der,1} - L.I.V^{v}_{izq,1}$$

Los cálculos se muestran en la tabla 4.15 y el gráfico de la línea de influencia en la figura 4.56.

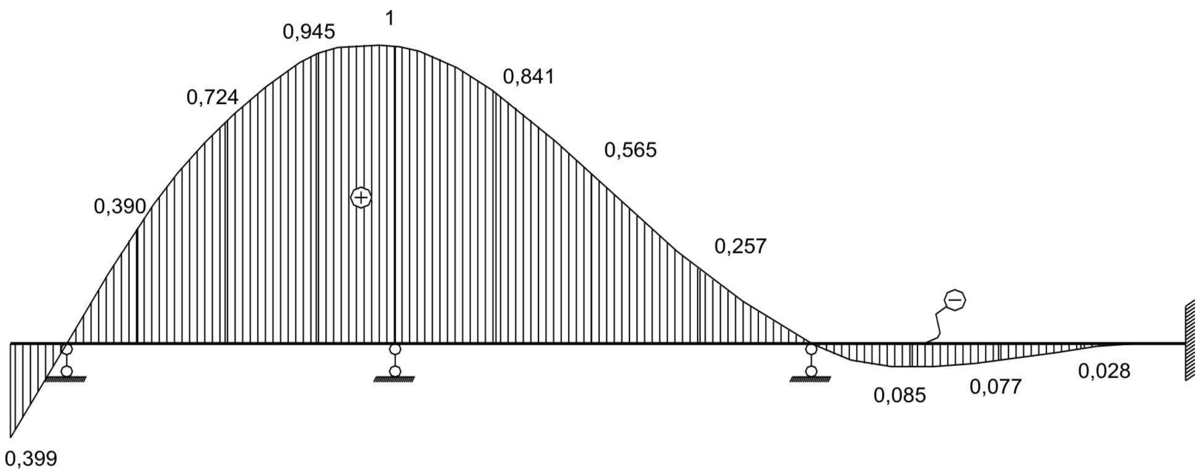


Fig. 4.56 Línea de influencia R_1

Tabla 4.15

L	ξ	M_0	M_1	M_2	$\frac{M_2 - M_1}{12}$	$\frac{M_0 - M_1}{8}$	$V^{v}_{der,1}$	$-V^{v}_{izq,1}$	R_1
L_0	0	-2	0,654	-0,154	-0,067	-0,332	0	0	-0,399
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0	-0,613	0,144	0,063	0,077	0	0,25	0,390
	0,5	0	-0,981	0,231	0,101	0,123	0	0,5	0,724
	0,75	0	-0,858	0,202	0,088	0,107	0	0,75	0,945
	1	0	0	0	0	0	0	1	1
L_2	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0,25	0	-0,642	-0,510	0,011	0,080	0,75	0	0,841
	0,5	0	-0,675	-0,900	-0,019	0,084	0,5	0	0,565
	0,75	0	-0,370	-0,839	-0,039	0,046	0,25	0	0,257
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0	0,131	-0,701	-0,069	-0,016	0	0	-0,085
	0,5	0	0,117	-0,623	-0,062	-0,015	0	0	-0,077
	0,75	0	0,044	-0,234	-0,023	-0,005	0	0	-0,028
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Luego, cargamos la línea de influencia R_1 por medio de la carga muerta $g = 1{,}2kN/m$ (figura 4.10, a). Las áreas de los tramos curvos lo calculamos por la fórmula del trapecio.

$$R_1 = gA_{R_1g} = 1{,}2\left[-\frac{1}{2}.0{,}399.2 + \frac{8}{4}\left(0 + 0{,}390 + 0{,}724 + 0{,}945 + \frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{4}\left(\frac{1}{2} + 0{,}841 + 0{,}565 + 0{,}257 + 0\right) - \frac{9}{4}(0 + 0{,}085 + 0{,}077 + 0{,}028 + 0)\right] = 12{,}937kN$$

Del cálculo ante la carga muerta (figura 4.20), la reacción en el apoyo 1 es:

$$R_1 = 13{,}032kN$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{13{,}032 - 12{,}937}{13{,}032}.100\% = 0{,}7\%$$

CAPITULO 5
ARMADURAS HIPERESTATICAS

5.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Armadura hiperestática o estáticamente indeterminada, es aquella, cuyas fuerzas internas no pueden ser determinadas solamente por las ecuaciones de equilibrio. El grado de indeterminación corresponde al número de barras adicionales y se determina por la fórmula:

$$G.I. = B - 2N \qquad (5.1)$$

Donde:

$G.I.$ – grado de indeterminación;

B – número de barras de la armadura, incluyendo los apoyos;

N – número de nudos.

Las armaduras hiperestáticas se pueden determinar por el método de las fuerzas. El sistema principal se obtiene, eliminando las barras adicionales o apoyos o por cortes de las barras adicionales cruzadas. En ambos casos, el sistema principal debe ser geométricamente invariable (estable).

El sistema de las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas tiene la forma:

$$\begin{gathered}
\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1p} = 0 \\
\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2p} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} = 0
\end{gathered} \qquad (5.2)$$

Los coeficientes son desplazamientos en el sistema principal en la dirección de las conexiones eliminadas y se determinan por la fórmula de Maxwell – Mohr, la cual para armaduras tiene la forma:

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_k L}{EA} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_k L}{(A/A_0)} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} N_i N_k L' \qquad (5.3)$$

Donde:

N_i, N_k – fuerzas axiales en las barras del sistema principal, debido a la acción de $x_i = 1$ y $x_k = 1$;

L – longitud real;

$L' = L\left(\frac{A_0}{A}\right)$ – longitud asumida de la barra de la armadura;

A – áreas de las secciones transversales.

Para realizar el cálculo será necesario dar el valor de A, expresándolo a través de un área asumida A_0. La sumatoria $(1 \le j \le c)$ se da por el número de barras de la armadura.

Análogamente determinamos los miembros libres de las ecuaciones:

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_p L}{EA} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_p L}{(A/A_0)} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} N_i N_p L' \qquad (5.4)$$

Donde:

N_p – fuerza en la barra del sistema principal, debido a la carga dada.

El error en la determinación de las fuerzas N en el sistema principal, influye directamente en la exactitud de todo el cálculo. Para ello, se comprueba por la fórmula de Gorbunov–Umanski:

$$\sum NL = \sum (P_x x + P_y y) \tag{5.5}$$

Donde:

P_x y P_y – resultantes horizontal y vertical de la acción de todas las fuerzas, incluido las reacciones de los apoyos;

x e y – coordenadas de los puntos de acción de las fuerzas externas en cualquier sistema de coordenadas elegido.

La solución del sistema de ecuaciones (5.2) determina las magnitudes de las fuerzas en las barras adicionales $x_1, x_2, ..., x_n$. Las fuerzas reales o definitivas en todas las barras de la armadura dada, se determinan como sumatoria del producto de las fuerzas unitarias desconocidas por las fuerzas obtenidas anteriormente y debido a la acción de las fuerzas externas, es decir, por la fórmula:

$$N_F = N_1 x_1 + N_2 x_2 + ... + N_n x_n + N_p \tag{5.6}$$

La veracidad de cálculo se comprueba cinemáticamente, calculándose los desplazamientos nulos en la armadura real en la dirección de las conexiones adicionales:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_r L}{EA} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} \frac{N_i N_r L}{(A / A_0)} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} N_i N_r L' = 0 \tag{5.7}$$

El cálculo de armaduras hiperestáticas ante cargas movibles se basa en la diagramación de las líneas de influencia de las barras de la armadura y se realiza también por el método de las fuerzas. El problema se formula, como la solución del sistema de ecuaciones canónicas (5.2) en la suposición, que la fuerza es vertical unitaria y que se desplaza por toda la armadura. Por ello, para describir los desplazamientos debido a las cargas, se usan pequeñas letras del alfabeto griego $\delta_{1p}, \delta_{2p}, ..., \delta_{np}$; y estas son funciones que dependen de la ubicación de la fuerza. Los gráficos de estas funciones (líneas de influencia de desplazamientos) pueden ser construidos por diferentes métodos. Es conveniente utilizar el teorema de desplazamientos recíprocos:

$$\delta_{ip} = \delta_{pi} \tag{5.8}$$

La magnitud δ_{pi} es el diagrama de deflexión del cordón cargado de la armadura (cordón, por el cual se desplaza la fuerza unitaria) debido a la acción de la carga desconocida $x_i = 1$. Consecuentemente, la construcción de las líneas de influencia δ_{ip} se puede reemplazar por los diagramas de deflexión.

Es adecuado usar el método, cuando el diagrama de deflexiones relativas de la armadura se iguala con el diagrama de momentos flectores en la viga “ficticia” estáticamente indeterminada, en la cual, en los puntos correspondientes a los nudos cargados del cordón de la armadura, actúan las “cargas elásticas”.

La carga elástica se iguala con el ángulo de quiebre del cordón cargado en el nudo de la armadura debido a la acción de la carga $x_i = 1$. Para su cálculo, en el nudo determinado, se debe de aplicar dos momentos unitarios opuestos, determinar las fuerzas N_k que surgen y calcular el desplazamiento por la fórmula Maxwell – Mohr (5.3):

$$\theta_{ki} = \delta_{ki} = \sum_{j=1}^{c} \frac{N_k N_i L}{EA} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} \frac{N_k N_i L}{(A/A_0)} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} N_k N_i L' \qquad (5.9)$$

De esta manera, a cada incógnita $x_i = 1$ le corresponde su sistema de cargas elásticas. Cargada la viga por el sistema de cargas, graficamos n diagramas de momentos flectores, equivalentes a los diagramas de deflexión del cordón cargado de la armadura, debido a la acción $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, ………, $x_n = 1$.

Para graficar la línea de influencia de las incógnitas, será necesario resolver el sistema de ecuaciones (5.2) mostrado en la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}\delta_{1p} + \beta_{12}\delta_{2p} + \ldots\ldots\ldots + \beta_{1n}\delta_{np} \\ x_2 &= \beta_{21}\delta_{1p} + \beta_{22}\delta_{2p} + \ldots\ldots\ldots + \beta_{2n}\delta_{np} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1}\delta_{1p} + \beta_{n2}\delta_{2p} + \ldots\ldots\ldots + \beta_{nn}\delta_{np} \end{aligned} \qquad (5.10)$$

La línea de influencia de cualquier incógnita x_i puede ser calculada como la suma de las líneas de influencia de los desplazamientos en la dirección de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ debido a la acción de la carga unitaria movible, multiplicado por sus correspondientes coeficientes β_{ik} (“número de influencia”).

Las líneas de influencia de las fuerzas finales en las barras de la armadura hiperestática se grafica en concordancia con la fórmula:

$$N_F^{(j)} = N_0^{(j)} + N_1^{(j)} x_1 + N_2^{(j)} x_2 + \ldots\ldots\ldots + N_n^{(j)} x_n \qquad (5.11)$$

Donde:

$N_0^{(j)}$ - línea de influencia de la fuerza en la barra j del sistema principal;

$N_1^{(j)}, N_2^{(j)}, \ldots\ldots, N_n^{(j)}$ - fuerzas en las barras j del sistema principal, debido a la acción de $x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots\ldots, x_n = 1;$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - línea de influencia de las incógnitas.

De acuerdo a las líneas de influencia, se pueden determinar las fuerzas en las barras de la armadura hiperestática, debido a la acción de la carga externa (estática y movible).

5.2 CALCULO ANALITICO DE ARMADURA HIPERESTATICA

Para la armadura hiperestática mostrada en la figura 5.1:

- Calcular la estructura ante las cargas estáticas;
- Graficar las líneas de influencia de las fuerzas en las barras marcadas.

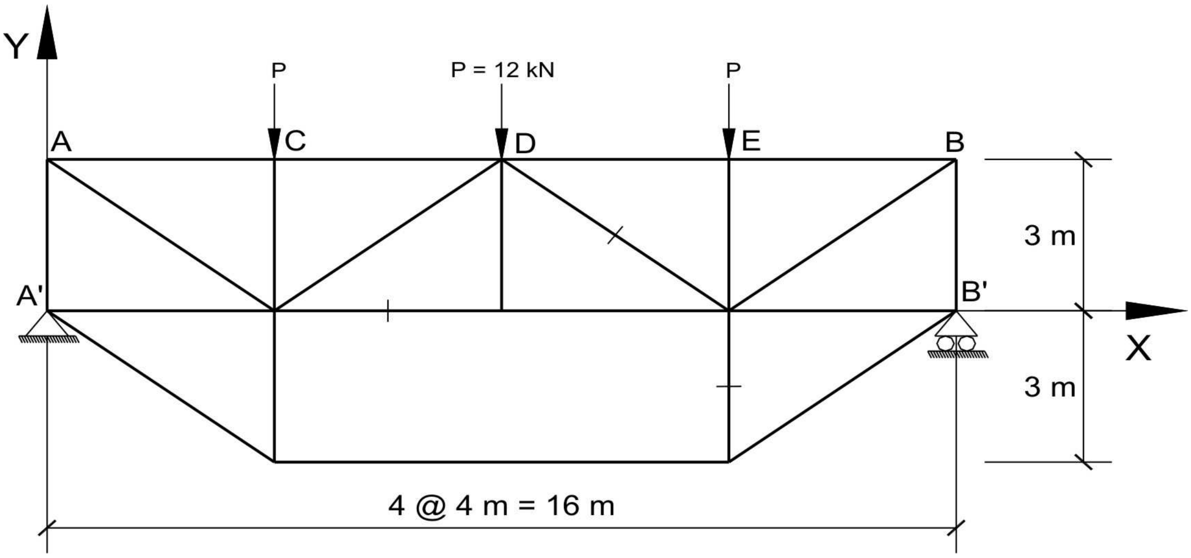


Fig. 5.1

Considere, que las áreas de las secciones transversales de los elementos de la armadura son: A_0 **-** área de la sección de los elementos colgantes; $4A_0$ - cordón superior; $2A_0$ **-** cordón inferior; $2{,}5A_0$ - diagonal y $1{,}5A_0$ - montante.

CALCULO ANTE CARGAS ESTATICAS

1. Calculamos el grado de indeterminación:

$$G.I. = B - 2N = 25 - 2.12 = 1$$

   La armadura es una vez hiperestática.

2. El sistema principal se obtiene cortando la barra horizontal colgante. Consecuentemente, la incógnita será la fuerza axial en esta barra (figura 5.2). Ahí se muestra el sistema de polos, el cual se utilizará en el futuro para designar a las barras. En la tabla 5.1 escribimos los números de todas las barras de la armadura, sus longitudes y áreas de sección transversal.
3. El sistema de ecuaciones canónicas del método de las fuerzas para el caso determinado, estará compuesta por una ecuación con una incógnita:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

   Hace falta aclarar, que esta ecuación expresa la condición de ausencia de dispersión de puntos en el lugar del corte ficticio de la barra 1 – 6.

4. Determinamos las fuerzas en las barras del sistema principal, debido a la acción de la incógnita $x_1 = 1$ (figura 5.3). Por cuanto las fuerzas debido a las cargas unitarias deben ser encontradas con alta exactitud, para su cálculo se deben de usar métodos analíticos confiables (nudos y secciones). Los resultados de los cálculos se muestran en la columna 6 de la tabla 5.1.

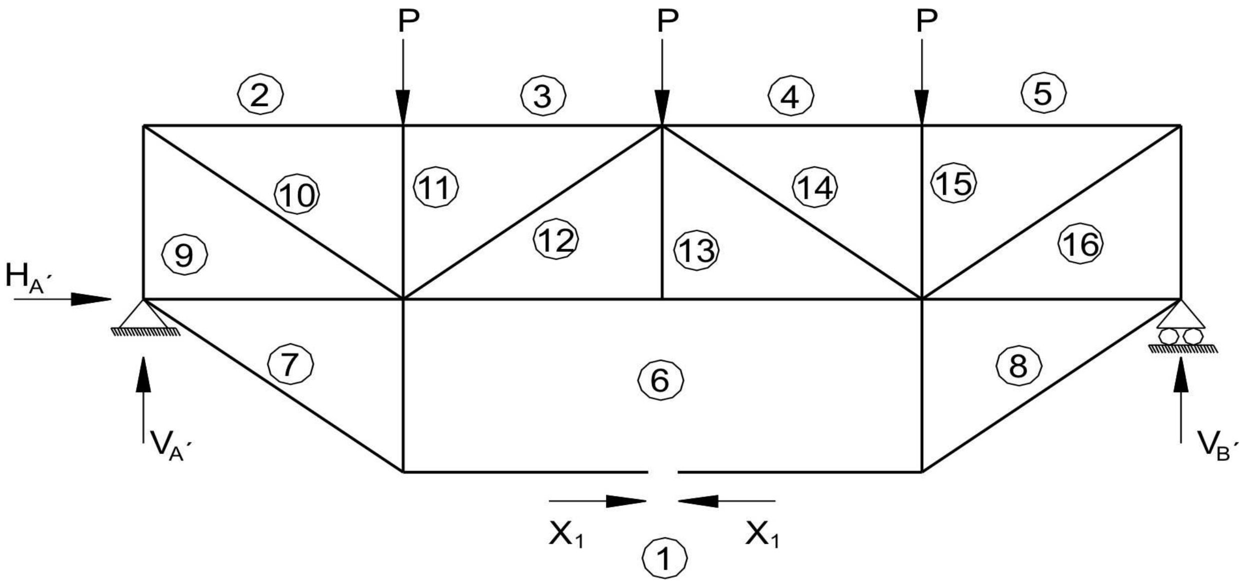


Fig. 5.2

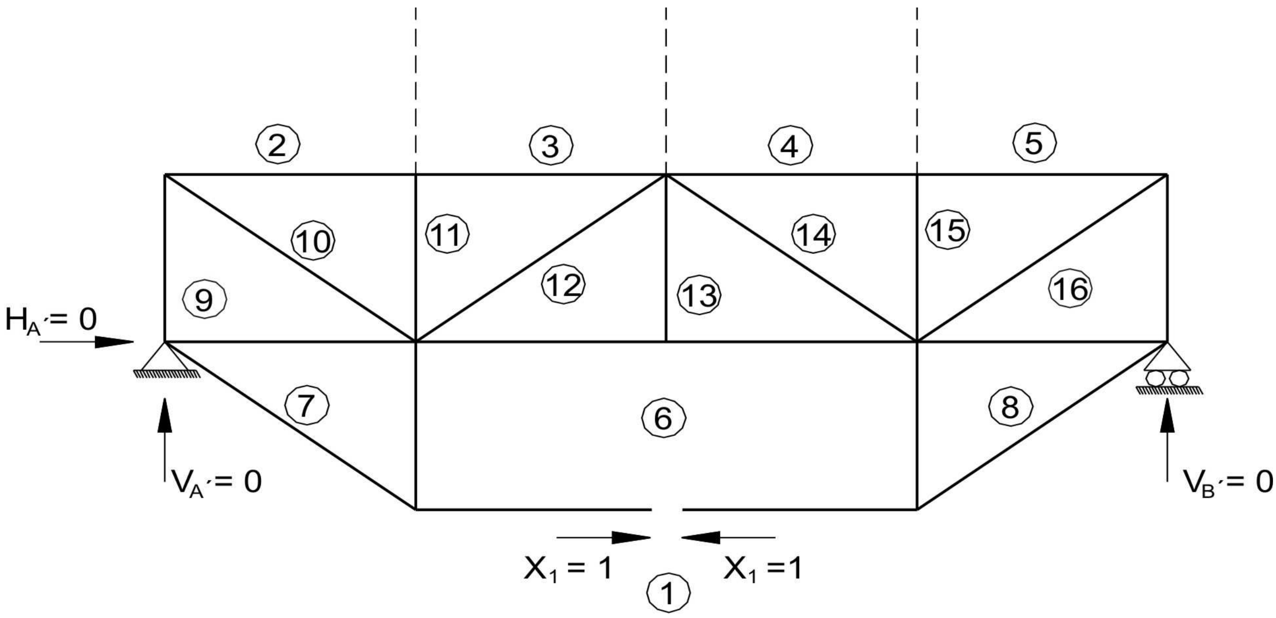


Fig. 5.3

5. Por cuanto el error en el cálculo de las fuerzas en el sistema principal, nos traerá consigo el error posterior de cálculo, entonces comprobamos las fuerzas N_1 por la fórmula de Gorbunov – Umanski (5.5). La parte izquierda de la igualdad lo calculamos para cada barra e ingresamos en la columna 7 de la tabla 5.1. La suma de estos valores para el presente problema es cero.
   La parte derecha de la fórmula de Gorbunov – Umanski depende de las fuerzas externas. En nuestro caso son las fuerzas horizontales $x_1 = 1$, actuante en el punto de corte de la barra 1 – 6, esto es a la distancia 8m del apoyo $A^{'}$. De acuerdo a esta orientación, una de las fuerzas es positiva $\left(P_x^{(izq.)} = x_1^{(izq.)} = +1\right)$ y la otra negativa $\left(P_x^{(der.)} = -x_1^{(der.)} = -1\right)$. La abcisa de estas

fuerzas es $x = 8$ para el sistema de coordenadas con inicio en el apoyo A'. Por cuanto $V_{A'} = V_{B'} = 0$, entonces no existe fuerza vertical $(P_y = 0)$ y de la ecuación (5.5) obtenemos:

$$\sum (P_x.x + P_y.y) = 1.8 + (-1).8 = 0$$

Esto quiere decir, que la igualdad (5.5) se ha cumplido, en consecuencia, las fuerzas debido a la acción de las cargas $x_1 = 1$ se encontraron correctamente.

6. En forma analítica y gráfica determinamos las fuerzas N_p de las barras del sistema principal isostático, debido a la acción de las cargas externas (figura 5.4), cuyos resultados ingresamos en la columna 10 de la tabla 5.1.

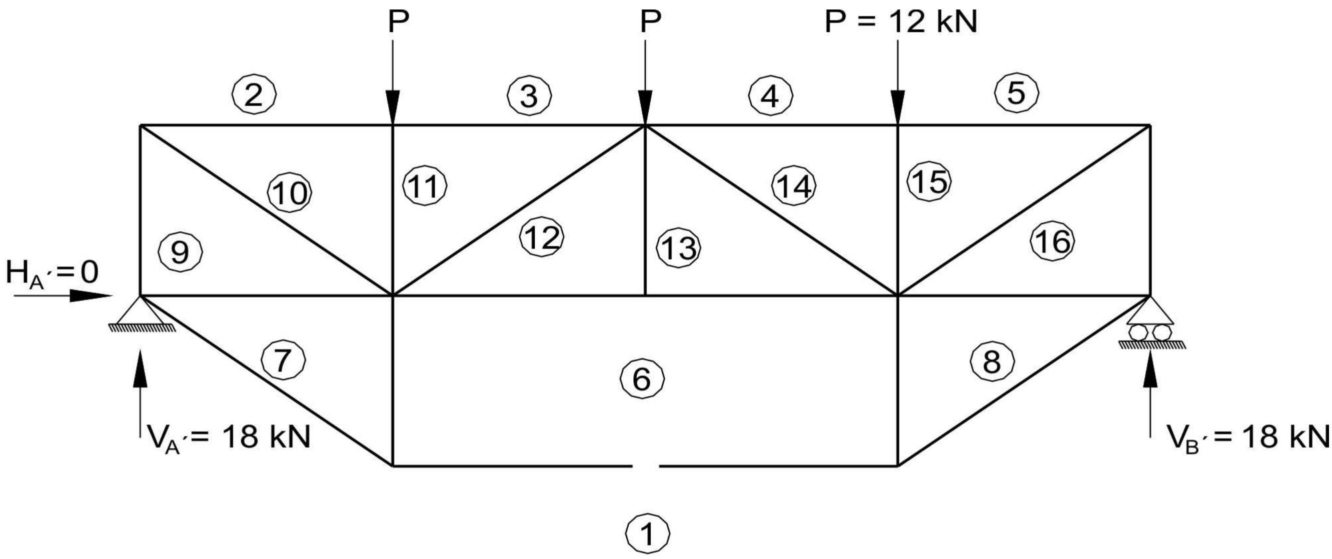


Fig. 5.4

7. Comprobamos las fuerzas N_p por la fórmula de Gorbunov – Umanski (5.5). Los miembros de la parte izquierda de la fórmula lo escribimos en la columna 11 de la tabla 5.1. La suma de estos valores es -108.

Calculamos la parte derecha de la fórmula. En el sistema mostrado actúan tres fuerzas verticales $P_y^{(1)} = P_y^{(2)} = P_y^{(3)} = -12kN$ con ordenada $y = 3m$ y dos reacciones verticales $P_y^{(4)} = V_{A'} = 18kN$ y $P_y^{(5)} = V_{B'} = 18kN$ con ordenada $y = 0$. De donde:

$$\sum (P_x.x + P_y.y) = (-12).3 + (-12).3 + (-12).3 = -108$$

Consecuentemente, las fuerzas en el sistema principal debido a la acción externa fueron calculadas correctamente.

8. Los coeficientes de la ecuación canónica lo calculamos por la fórmula de Maxwell – Mohr:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA_0} \sum_{j=1}^{c} N_1 N_1 L'$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EA_0}\sum_{j=1}^{c} N_p N_1 L'$$

El cálculo de los valores dentro de la sumatoria se da en las columnas 9 y 12 de la tabla 5.1. La suma de los elementos de la columna 9 corresponde a la magnitud del coeficiente desconocido y la columna 12 al miembro libre.

$$\delta_{11} = \frac{59{,}5}{EA_0}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{556}{EA_0}$$

9. Resolvemos la ecuación canónica por el método de las fuerzas:

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-\frac{556}{EA_0}\right)}{\left(\frac{59{,}5}{EA_0}\right)} = 9{,}345\text{kN}$$

10. Determinamos las fuerzas finales en las barras de la armadura por la fórmula:

$$N_F = N_1 x_1 + N_p$$

El cálculo se da en forma de tabla e ingresan los resultados en la columna 14 de la tabla 5.1.

11. Realizamos la comprobación cinemática:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EA_0}\sum_{j=1}^{c} N_F N_1 L' = 0$$

Calculamos los miembros que se encuentran dentro de la sumatoria e ingresamos en la columna 15 de la tabla 5.1. La suma de los valores positivos es 289,692 y los negativos -289,668. Consecuentemente, el error porcentual de cálculo es:

$$\varepsilon = \frac{289{,}692 - 289{,}668}{289{,}692}.100\% = 0{,}0083\% \cong 0{,}01\%$$

Tabla 5.1

Elemento	Nº de barra	L (m)	$\frac{A}{A_0}$	$L^{'} = L.\frac{A_0}{A}$	N_1	N_1L	$N_1L^{'}$
1	2	3	4	5	6	7	8
Cordón superior	2-10	4,000	4,000	1,000	1,000	4,000	1,000
	3-11	4,000	4,000	1,000	1,000	4,000	1,000
	4-14	4,000	4,000	1,000	1,000	4,000	1,000
	5-15	4,000	4,000	1,000	1,000	4,000	1,000
Cordón inferior	7-9	4,000	2,000	2,000	-1,000	-4,000	-2,000
	6-12	4,000	2,000	2,000	-2,000	-8,000	-4,000
	6-13	4,000	2,000	2,000	-2,000	-8,000	-4,000
	8-16	4,000	2,000	2,000	-1,000	-4,000	-2,000
Montantes	2-9	3,000	1,500	2,000	0,750	2,250	1,500
	10-11	3,000	1,500	2,000	0,000	0,000	0,000
	12-13	3,000	1,500	2,000	0,000	0,000	0,000
	14-15	3,000	1,500	2,000	0,000	0,000	0,000
	5-16	3,000	1,500	2,000	0,750	2,250	1,500
Diagonales	9-10	5,000	2,500	2,000	-1,250	-6,250	-2,500
	11-12	5,000	2,500	2,000	0,000	0,000	0,000
	13-14	5,000	2,500	2,000	0,000	0,000	0,000
	15-16	5,000	2,500	2,000	-1,250	-6,250	-2,500
Colgantes	1-7	5,000	1,000	5,000	1,250	6,250	6,250
	6-7	3,000	1,000	3,000	-0,750	-2,250	-2,250
	1-6	8,000	1,000	8,000	1,000	8,000	8,000
	6-8	3,000	1,000	3,000	-0,750	-2,250	-2,250
	1-8	5,000	1,000	5,000	1,250	6,250	6,250
$\sum$						0,000	

Continuación de la Tabla 5.1

Nº de barra	N_1N_1L'	N_p (kN)	N_pL	N_pN_1L'	N_1x_1	N_F	N_FN_1L'
	9	10	11	12	13	14	15
2-10	1,000	-24,000	-96,000	-24,000	9,345	-14,655	-14,655
3-11	1,000	-24,000	-96,000	-24,000	9,345	-14,655	-14,655
4-14	1,000	-24,000	-96,000	-24,000	9,345	-14,655	-14,655
5-15	1,000	-24,000	-96,000	-24,000	9,345	-14,655	-14,655
7-9	2,000	0,000	0,000	0,000	-9,345	-9,345	18,690
6-12	8,000	32,000	128,000	-128,000	-18,690	13,310	-53,240
6-13	8,000	32,000	128,000	-128,000	-18,690	13,310	-53,240
8-16	2,000	0,000	0,000	0,000	-9,345	-9,345	18,690
2-9	1,125	-18,000	-54,000	-27,000	7,009	-10,991	-16,487
10-11	0,000	-12,000	-36,000	0,000	0,000	-12,000	0,000
12-13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14-15	0,000	-12,000	-36,000	0,000	0,000	-12,000	0,000
5-16	1,125	-18,000	-54,000	-27,000	7,009	-10,991	-16,487
9-10	3,125	30,000	150,000	-75,000	-11,681	18,319	-45,797
11-12	0,000	-10,000	-50,000	0,000	0,000	-10,000	0,000
13-14	0,000	-10,000	-50,000	0,000	0,000	-10,000	0,000
15-16	3,125	30,000	150,000	-75,000	-11,681	18,319	-45,797
1-7	7,813	0,000	0,000	0,000	11,681	11,681	73,006
6-7	1,687	0,000	0,000	0,000	-7,009	-7,009	15,770
1-6	8,000	0,000	0,000	0,000	9,345	9,345	74,760
6-8	1,687	0,000	0,000	0,000	-7,009	-7,009	15,770
1-8	7,813	0,000	0,000	0,000	11,681	11,681	73,006
$\sum$	59,500		-108,000	-556,000			

CALCULO ANTE CARGA MOVIBLE

Por datos del problema, se pide graficar las líneas de influencia de las fuerzas axiales en las barras 6-12, 6-8 y 13-14 de la armadura hiperestática. Por cuanto, en el cálculo ante las cargas estáticas actuaron en los nudos del cordón superior, vamos a construir los gráficos de las líneas de influencia, suponiendo que el cordón superior es el cargado.

La ecuación canónica del método de las fuerzas para una armadura con un grado de hiperestaticidad tiene la siguiente forma:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{1p} = 0$$

La magnitud δ_{11} fue determinada en el cálculo ante cargas estáticas e igual a $\delta_{11} = \frac{59,5}{EA_0}$. Queda determinar la magnitud del desplazamiento de la carga, el cual es variable y dependiente de la ubicación de la carga unitaria. En base al teorema de reciprocidad de desplazamientos $\delta_{1p} = \delta_{p1}$, el desplazamiento δ_{p1} viene a estar dado por el diagrama de deflexiones de la carga (en nuestro caso el cordón superior) de la armadura, debido a la acción de la carga $x_1 = 1$. El diagrama de deflexiones lo graficaremos utilizando el método de cargas elásticas.

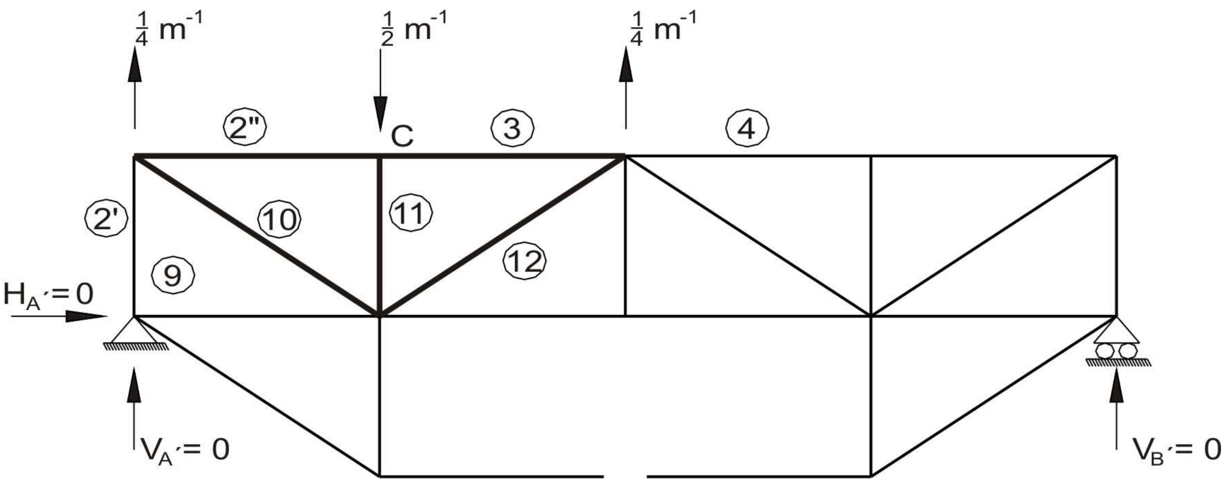


Fig. 5.5

1. Determinamos las cargas elásticas. La primera carga elástica lo calculamos como ángulo de corte del cordón superior del sistema principal en el nudo "C". Para ello, en el nudo aplicamos dos momentos unitarios opuestos, reemplazados por pares de cargas (figura 5.5). Ante tal carga, todas las barras tienen fuerzas nulas, excepto las barras marcadas con línea gruesa. Las fuerzas en las barras cercanas al punto "C" se determinan en forma analítica y se comprueba por el diagrama de Maxwell – Cremona.

   La carga elástica se determina por la fórmula de Maxwell – Mohr (5.9):

$$\theta_C = \delta_{C1} = \frac{1}{EA_0}\sum N_C N_1 L'$$

En tal elección, los momentos de la carga elástica son positivos, si están orientados de arriba abajo, traccionando en flexión la fibra inferior de la viga ficticia. Todos los cálculos están dados en la tabla 5.2.

Tabla 5.2

Nº de barra	$N_1 l'$	N_C	$N_C N_1 L'$
2-10	1	-0,333	-0,333
3-11	1	-0,333	-0,333
9-10	-2,5	0,417	-1,042
11-12	0	0,417	0
10-11	0	-0,5	0
		Σ =	-1,708

De esta manera, la carga elástica en el punto "C" es $\theta_C = -\frac{1{,}708}{EA_0}$.

El signo negativo indica que la carga hace falta orientarlo hacia arriba (en sentido opuesto a lo inicialmente propuesto en el nudo C) (figura 5.5).

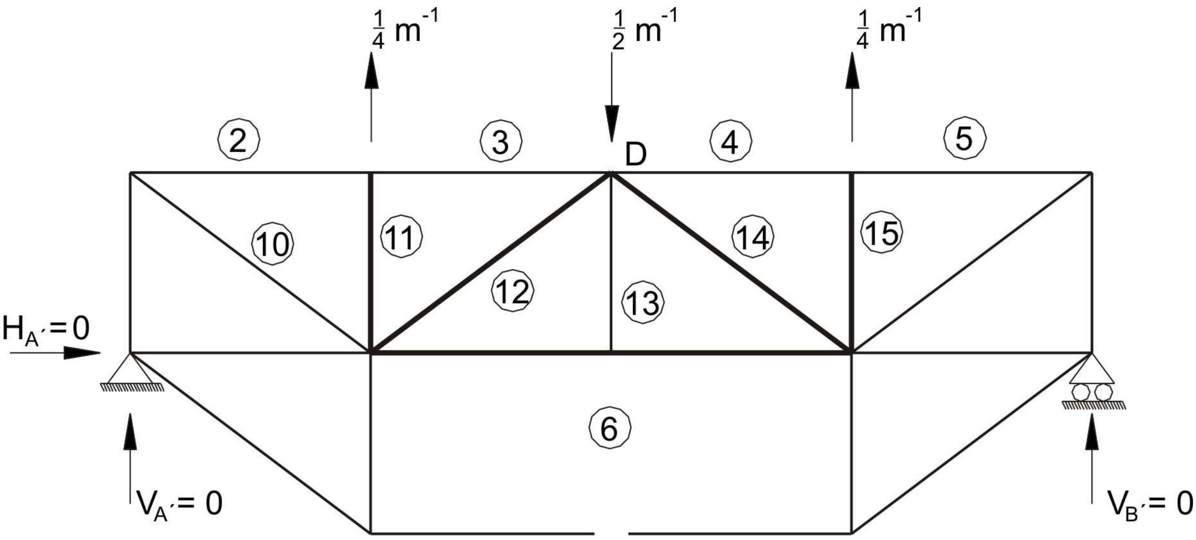


Fig. 5.6

Análogamente, determinamos la carga elástica en el nudo "D". Para ello, en el nudo D del sistema principal, aplicamos los momentos unitarios opuestos, los cuales los reemplazamos por los pares de fuerza (figura 5.6). Todas las barras son nulas, a excepción de las ubicadas alrededor del nudo D. Las fuerzas en las barras se encuentran analíticamente y se comprueba gráficamente. La carga elástica se calcula por la fórmula de Maxwell – Mohr:

$$\theta_D = \delta_{D1} = \frac{1}{EA_0} \sum N_D N_1 L'$$

Los cálculos lo ingresamos en la tabla 5.3.

Tabla 5.3

Nº de barra	N_1L'	N_D	N_DN_1L'
3-11	1	0	0
4-14	1	0	0
6-12	-4	0,333	-1,333
6-13	-4	0,333	-1,333
10-11	0	0,25	0
11-12	0	-0,417	0
13-14	0	-0,417	0
14-15	0	0,25	0
		Σ =	-2,666

La carga elástica en el nudo D, es igual a $\theta_D = -\frac{2,666}{EA_0}$ y también está orientada hacia arriba.

Por cuanto el sistema principal y la carga unitaria $x_1 = 1$ son simétricos, también serán simétricas las cargas elásticas. Por ello, la carga en el nudo E será igual a la carga en el nudo C:

$$\theta_E = \theta_C = -\frac{1,708}{EA_0}$$

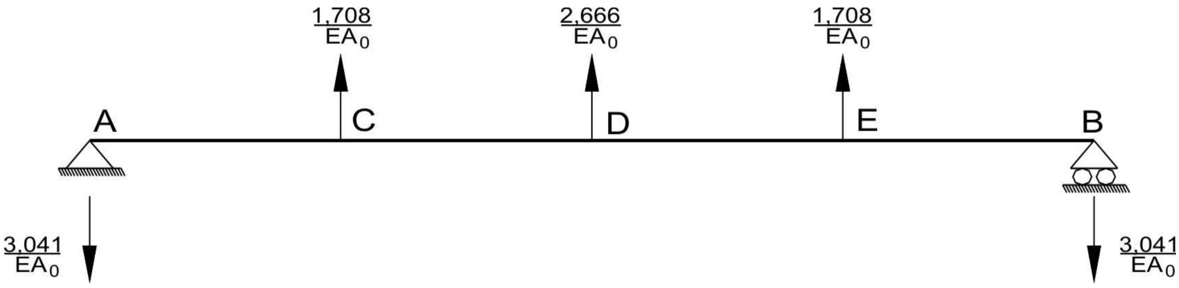


Fig. 5.7

2. Reemplazamos el cordón cargado (en este caso superior) del sistema principal por una viga simplemente apoyada, donde actúan las cargas elásticas (figura 5.7). El diagrama de momentos M^F en la viga es igual al diagrama de deflexiones del cordón superior de la armadura. Sus ordenadas son positivas si traccionan las fibras inferiores de la viga ficticia. En la figura 5.8 se muestra el diagrama M^F. Ahí se tiene que considerar, que el cordón superior puede desplazarse por la vertical, debido a que los nudos A y B, que fueron considerados fijos, en la realidad pueden desplazarse por la vertical (desplazamientos de vigas sobre apoyos elásticos).

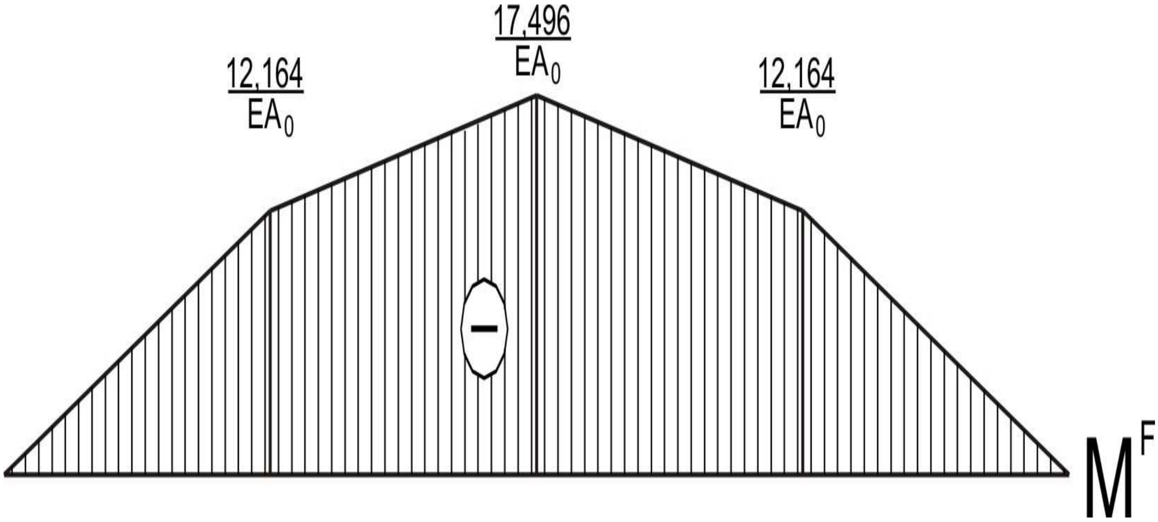


Fig. 5.8

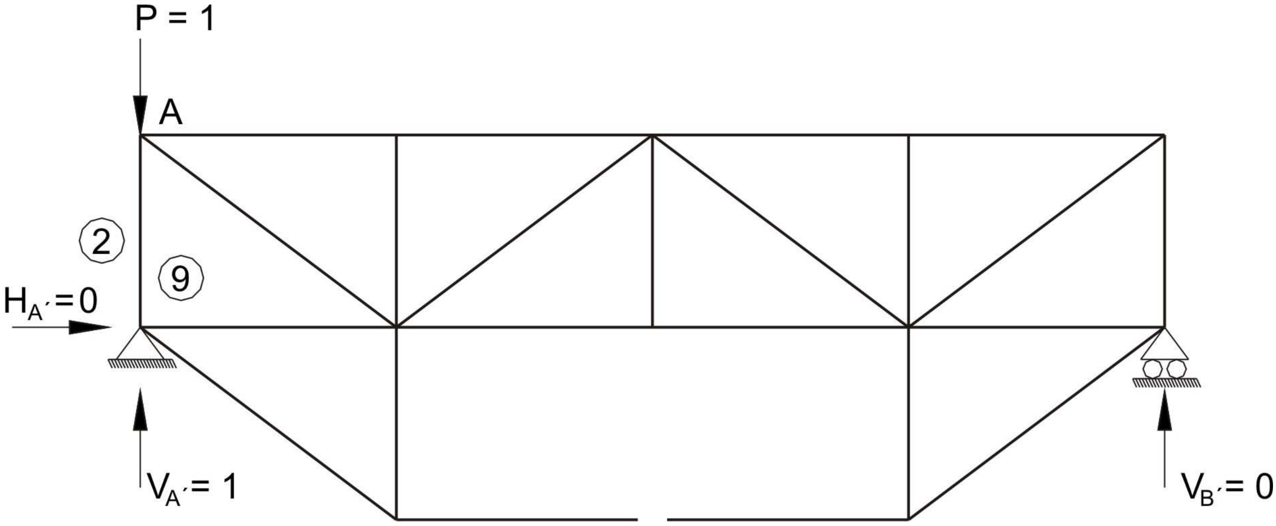


Fig. 5.9

Determinamos la deflexión del nudo “A” del cordón cargado de la armadura, correspondiente al apoyo izquierdo de la viga ficticia. Para ello, en el punto A del sistema principal, aplicamos una carga vertical unitaria (figura 5.9). Está claro, que todas las barras serán nulas, a excepción de la barra 2-9, cuya fuerza interna será igual a $N_{2-9} = -1$.

El desplazamiento vertical del nudo A será:

$$y_A = \delta_{A1} = \frac{1}{EA_0}\sum N_A N_1 L^{'} = \frac{1}{EA_0}.(-1).1{,}5 = -\frac{1{,}5}{EA_0}$$

En concordancia con la simetría del problema, la deflexión del nudo B será:

$$y_B = \delta_{B1} = -\frac{1{,}5}{EA_0}$$

En la figura 5.10 se muestra el diagrama de desplazamientos verticales del cordón superior de la armadura.

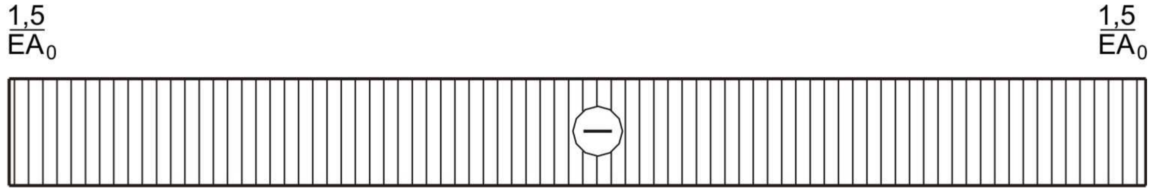


Fig. 5.10

El diagrama final de deflexiones (figura 5.11) se obtiene como la suma de dos diagramas: diagrama de deflexiones, construido sin consideración de los desplazamientos de los apoyos A' y B' (figura 5.8) y el diagrama de deflexiones del cordón, considerando el desplazamiento vertical de los puntos A y B (figura 5.10). Este diagrama de deflexiones es equivalente a la línea de influencia δ_{1p}.

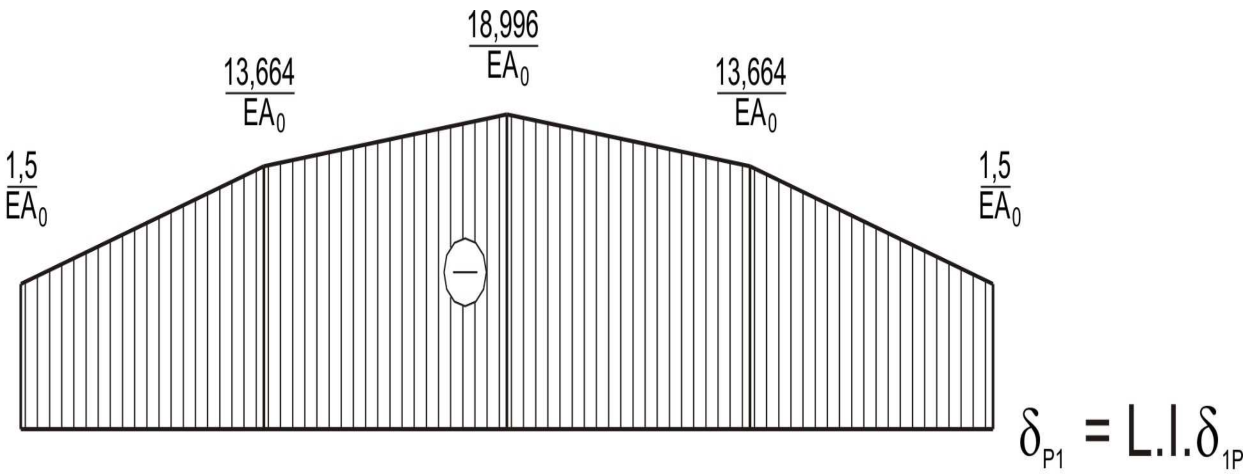


Fig. 5.11

Para comprobar la veracidad de los resultados, cargamos la línea de influencia graficada por las cargas estáticas:

$$\Delta_{1p} = \sum P_i y_i = 12\left(-\frac{13,664}{EA_0}\right) + 12\left(-\frac{18,996}{EA_0}\right) + 12\left(-\frac{13,664}{EA_0}\right) = -\frac{555,888}{EA_0}$$

Del cálculo ante cargas estáticas se tiene que $\Delta_{1p} = -\dfrac{556}{EA_0}$

3. Resolvemos la ecuación canónica del método de las fuerzas:

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{EA_0}{59,5}\delta_{1p}$$

De esta manera, para obtener la línea de influencia de una incógnita, es suficiente multiplicar el diagrama de deflexiones del cordón superior del sistema principal (figura 5.11) por el número de influencia $\beta_{11} = -\dfrac{EA_0}{59,5}$.

Para comprobar lo cargamos con las cargas estáticas:

$$x_1 = 12.0{,}230 + 12.0{,}319 + 12.0{,}230 = 9{,}348\text{kN} \cong 9{,}345\text{kN}$$

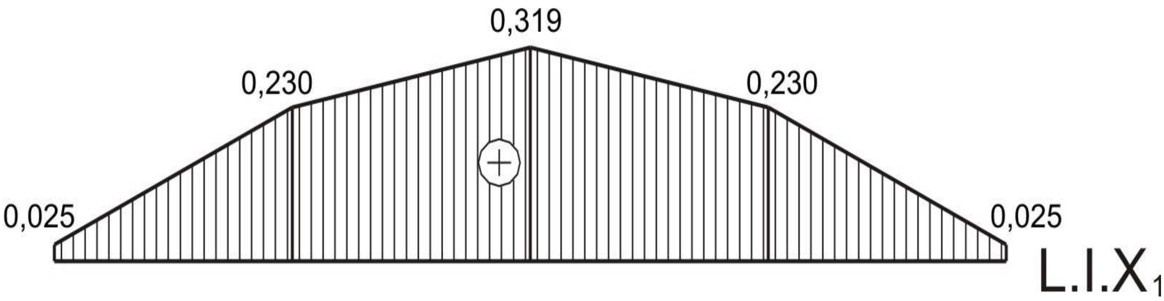


Fig. 5.12

4. La línea de influencia de la fuerza $N_F^{(6-12)}$ de la armadura dada, lo graficamos en concordancia con la fórmula 5.11:

$$N_F^{(6-12)} = N_0^{(6-12)} + N_1^{(6-12)} x_1$$

Donde:

$N_0^{(6-12)}$ - línea de influencia de la fuerza en la barra 6-12 graficada en el sistema principal (figura 5.13);

$N_1^{(6-12)}$ - fuerza en la barra 6-12 del sistema principal, ocasionado por la acción de la incógnita $x_1 = 1$ y calculado anteriormente ante cargas estáticas (columna 6 de la tabla 5.1, $N_1^{(6-12)} = -2{,}000$);

x_1 - línea de influencia de la incógnita (figura 5.12).

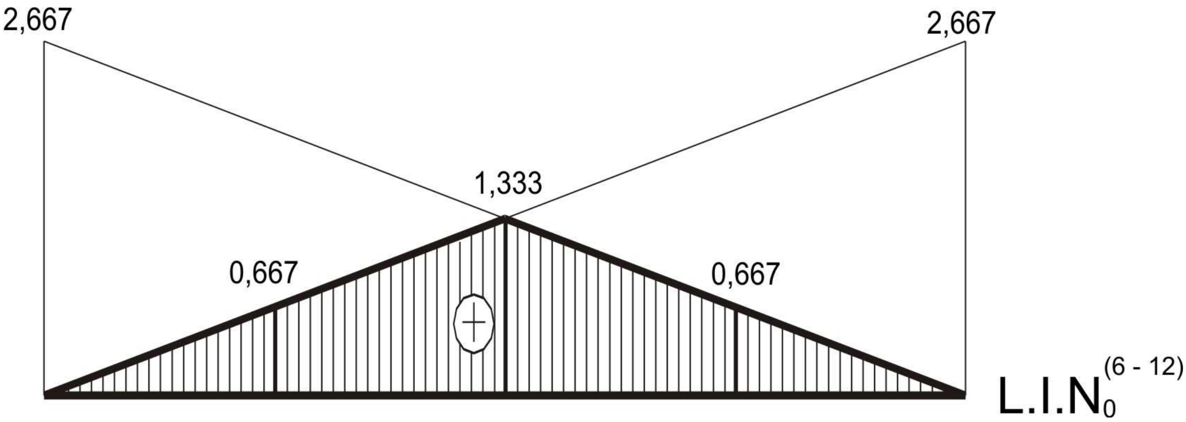


Fig. 5.13

Para la barra 6-12 la fórmula quedará así:

$$N_F^{(6-12)} = N_0^{(6-12)} - 2{,}000.x_1$$

El cálculo lo ingresamos en la tabla 5.4.

Tabla 5.4

Nº de nudo	x_1	$N_0^{(6-12)}$	$-2{,}000x_1$	$N_F^{(6-12)}$
A	0,025	0	-0,050	-0,050
C	0,230	0,667	-0,460	0,207
D	0,319	1,333	-0,638	0,695
E	0,230	0,667	-0,460	0,207
B	0,025	0	-0,050	-0,050

La línea de influencia final de la fuerza $N_F^{(6-12)}$ ha sido construida como resultado de la suma de las figuras 5.13 y 5.14, mostrada en la figura 5.15.

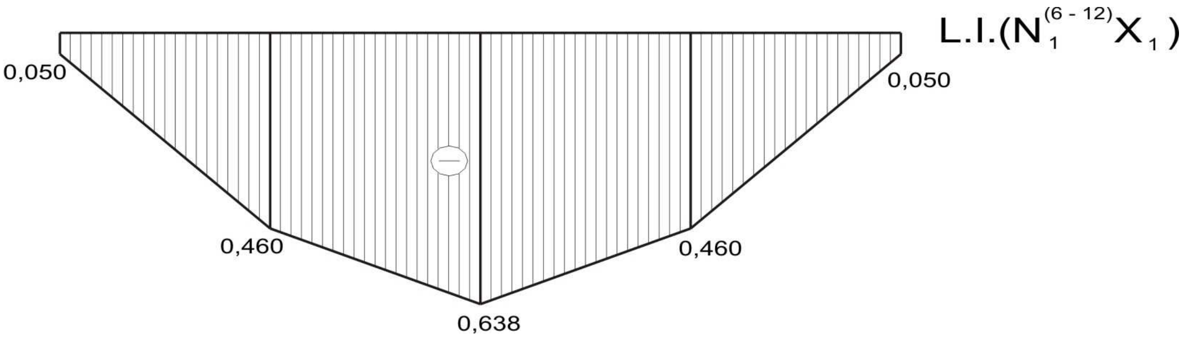


Fig. 5.14

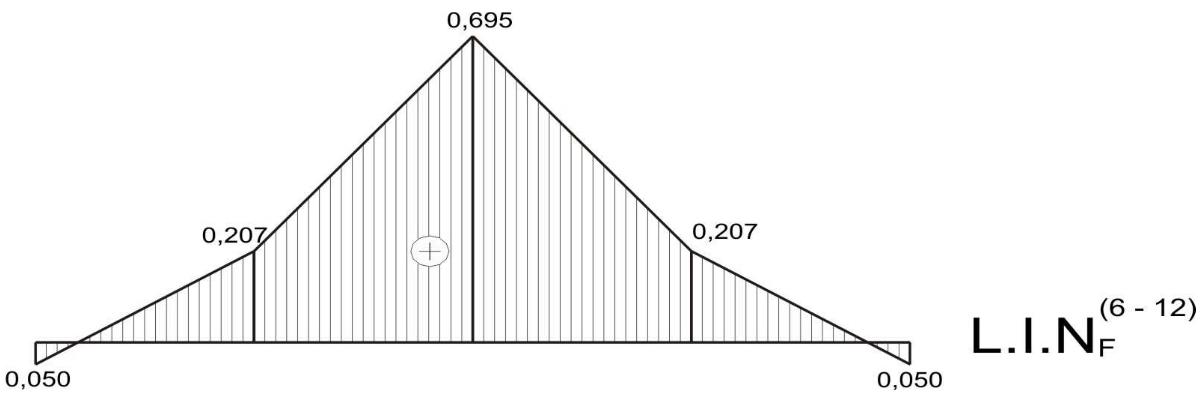


Fig. 5.15

Como comprobación determinamos en base a la línea de influencia final, la fuerza interna en la barra 6-12 debido a las cargas estáticas, multiplicando las fuerzas $P = 12kN$ por sus correspondientes ordenadas de la línea de influencia (figura 5.15):

$$N_F^{(6-12)} = 12{,}000.0{,}207 + 12{,}000.0{,}695 + 12{,}000.0{,}207 = 13{,}308kN$$

En el cálculo de la armadura ante las cargas estáticas, esta fuerza fue igual a 13,310kN, lo cual indica que los resultados fueron prácticamente iguales y, con ello, se demuestra la veracidad de los mismos.

5. Para graficar las líneas de influencia de la fuerza $N_F^{(6-8)}$ en la armadura determinada, utilizamos la fórmula 5.11:

$$N_F^{(6-8)} = N_0^{(6-8)} + N_1^{(6-8)}x_1$$

La línea de influencia de la fuerza en la barra 6-8 del sistema principal será igual a cero, esto es, dicha barra en el sistema principal en cualquier posición de la carga en el cordón superior será nula. La fuerza en la barra 6-8 en el sistema principal, debido a la acción de la fuerza $x_1 = 1$ ha sido calculado en la columna 6 de la tabla 5.1 y es igual a $N_1^{(6-8)} = -0,750$. Por ello, la línea de influencia solicitada se obtiene solamente en base a la línea de influencia x_1 y su ordenada lo determinamos por la fórmula:

$$N_F^{(6-8)} = -0,750x_1$$

La línea de influencia $N_F^{(6-8)}$ está graficada en la figura 5.16 por las ordenadas construidas por la tabla 5.5.

Tabla 5.5

Nº de nudo	x_1	$N_F^{(6-8)}$
A	0,025	-0,019
C	0,230	-0,173
D	0,319	-0,239
E	0,230	-0,173
B	0,025	-0,019

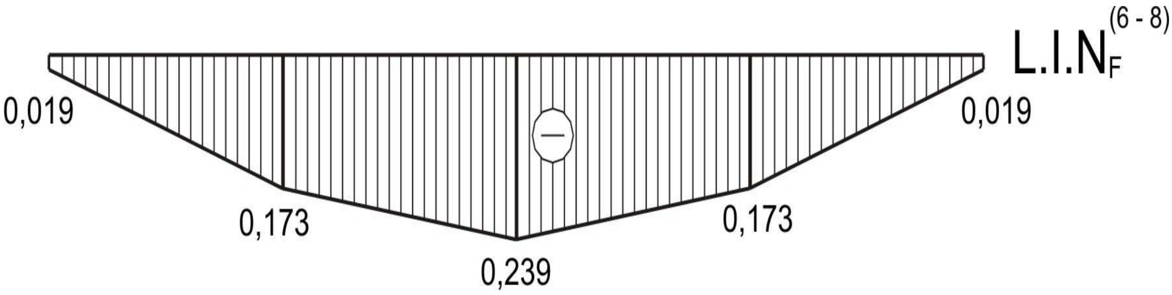


Fig. 5.16

Para comprobar, en base a la línea de influencia construida, determinamos la fuerza en la barra 6-8 debido a la acción de las cargas estáticas, lo cual concuerda con los resultados obtenidos en la primera parte (tabla 5.1, columna 14).

$$N_F^{(6-8)} = 12.(-0,173) + 12.(-0,239) + 12.(-0,173) = -7,020kN$$

6. Utilizamos la fórmula 5.11 para graficar la línea de influencia de la fuerza $N_F^{(13-14)}$:

$$N_F^{(13-14)} = N_0^{(13-14)} + N_1^{(13-14)}x_1$$

Como la fuerza en la barra 13-14 del sistema principal, debido a la acción de la fuerza $x_1 = 1$ es cero (columna 6 de la tabla 5.1), entonces la línea de influencia de la fuerza $N_F^{(13-14)}$ en los sistemas hiperestático e isostático serán iguales (figura 5.17):

$$N_F^{(13-14)} = N_0^{(13-14)}$$

La veracidad de la construcción de la línea de influencia $N_F^{(13-14)}$ lo comprobamos por la carga del sistema con las tres cargas estáticas $P = 12kN$, que prácticamente concuerda con el resultado obtenido en la primera parte del cálculo (tabla 5.1, columna 14).

$$N_F^{(13-14)} = 12.(-0,417) + 12.(-0,833) + 12.(0,417) = -9,996kN$$

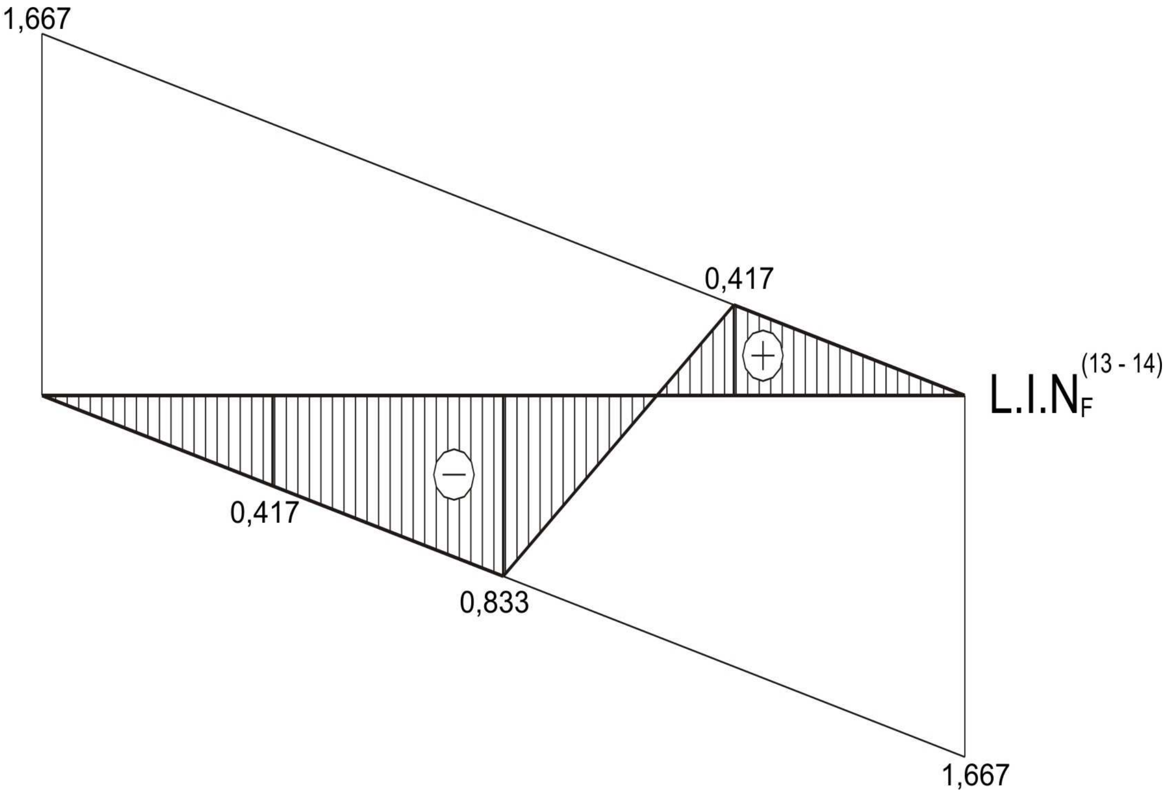


Fig. 5.17

CAPITULO 6

METODO DE DESPLAZAMIENTOS

El método de desplazamientos es uno de los métodos más conocidos de cálculo de estructuras hiperestáticas y en muchos casos permite reducir la laboriosidad de cálculo, en comparación con el método de las fuerzas.

En base a ello, el método de desplazamientos perfectamente se puede programar y resolver grandes estructuras con ayuda informática.

Para el cálculo de vigas y pórticos por el método de desplazamientos, se desprecian las deformaciones longitudinales de las barras y las deformaciones por cizallamiento, así como el acercamiento de los extremos de las barras en flexión.

En caso que no se apliquen estas hipótesis, se incrementará el número de incógnitas, para lo cual será necesario utilizar el método de elementos finitos.

En calidad de incógnitas en el método de desplazamientos, se consideran los desplazamientos de los nudos del pórtico. Como nudos del pórtico se consideran las conexiones rígidas o rótulas, puntos de rotura de las barras, así como los lugares de cambios de rigidez de las mismas.

Existen dos tipos de desplazamientos desconocidos: angulares y lineales. Las incógnitas angulares son los ángulos de giro de los nudos rígidos del pórtico. Las incógnitas lineales son los desplazamientos lineales de los nudos del pórtico y su número se determina por la cantidad de barras adicionales, que son necesarias ingresar al esquema estructural de rótulas, para convertirlo en un sistema geométricamente invariable. Dicho esquema se forma introduciendo rótulas en todos los nudos del pórtico.

Al número de incógnitas del método de desplazamientos se le conoce como *grado de indeterminación cinemática del pórtico*.

6.1 SISTEMA PRINCIPAL

El sistema principal del método de desplazamientos se efectúa a partir del pórtico dado e introduciendo en sus nudos las conexiones adicionales. Se tienen dos tipos de conexiones: los *empotramientos elásticos*, los cuales impiden los ángulos de giro de los nudos rígidos, pero no excluyen sus desplazamientos lineales y las *barras adicionales*, que impiden solamente los desplazamientos lineales. En los empotramientos elásticos surgen como reacción solamente los momentos y en las barras adicionales, únicamente las reacciones en los apoyos. Las conexiones adicionales se colocan de tal manera, que impidan desplazarse a los nudos del pórtico. Para ello, los empotramientos elásticos se colocan en todos los nudos rígidos del pórtico y las barras adicionales, tipo apoyos en una dirección, los cuales convertirán al pórtico en un esquema estructural de rótulas geométricamente invariable.

De esta manera, el sistema principal del método de desplazamientos, estará dado por un conjunto de vigas hiperestáticas independientes, cuyos estados esfuerzo-deformación para diferentes acciones, previamente son conocidas.

6.2 SISTEMA DE ECUACIONES

El sistema principal será equivalente al pórtico dado, con la condición de igualdad a cero de las reacciones en las conexiones adicionales. Esta condición se utiliza para elaborar el sistema de ecuaciones del método de desplazamientos.

Las ecuaciones del método de desplazamientos generan el sistema de ecuaciones algebraicas lineales respecto a los desplazamientos desconocidos y pueden ser resueltos en forma canónica o descompuesta.

En la forma descompuesta de la formulación de las ecuaciones, se utilizan las fórmulas, que expresen las fuerzas internas en los extremos de las vigas hiperestáticas, dependientes del tipo de acción externa: desplazamiento de los apoyos y cargas.

Para el caso de una viga doblemente empotrada (figura 6.1), los momentos en los apoyos y las fuerzas cortantes se determinarán por las siguientes fórmulas:

$$M_{ab} = 2i_{ab}\left(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}\right) + M'_{ab} \tag{6.1}$$

$$M_{ba} = 2i_{ab}\left(2\varphi_b + \varphi_a - 3\psi_{ab}\right) + M'_{ba} \tag{6.2}$$

$$V_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{L_{ab}}\left(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}\right) + V'_{ab} \tag{6.3}$$

$$V_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{L_{ab}}\left(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}\right) + V'_{ba} \tag{6.4}$$

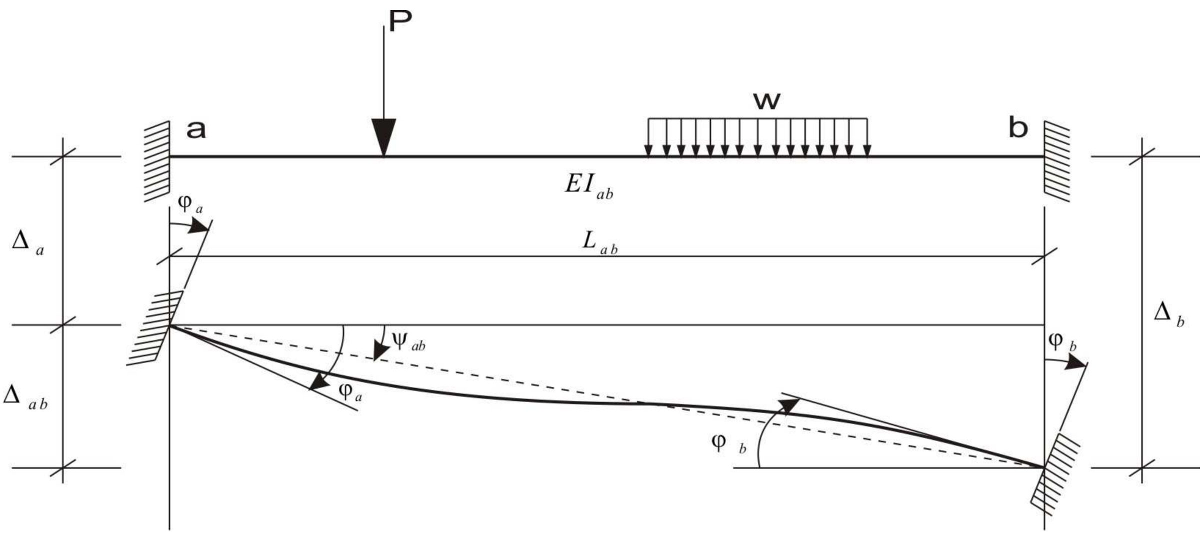


Fig. 6.1

Correspondientemente, para el caso cuando uno de los apoyos de la viga es empotrado y el otro articulado (apoyo fijo) (figura 6.2), las fórmulas son:

$$M_{ab} = 3i_{ab}\left(\varphi_a - \psi_{ab}\right) + M''_{ab} \tag{6.5}$$

$$M_{ba} = 0 \tag{6.6}$$

$$V_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{L_{ab}}\left(\varphi_a - \psi_{ab}\right) + V''_{ab} \tag{6.7}$$

$$V_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{L_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab}) + V''_{ba} \qquad (6.8)$$

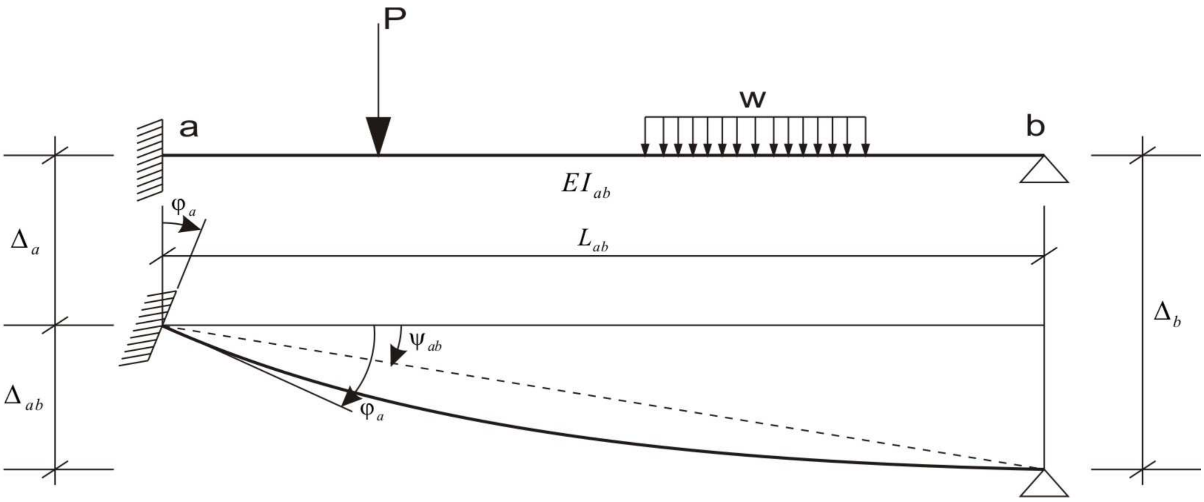


Fig. 6.2

En las fórmulas 6.1 – 6.8 se tiene que:

φ_a, φ_b - ángulos de giro de los empotramientos;

$\psi_{ab} = \psi_{ba} = \frac{\Delta_{ab}}{L_{ab}}$ - ángulo de desviación de la barra;

$\Delta_{ab} = \Delta_{ba}$ - desplazamiento lineal de los nudos a y b de la barra, uno respecto al otro;

$i_{ab} = i_{ba} = \frac{(EI)_{ab}}{L_{ab}}$ - rigidez por metro lineal de la barra a-b;

M_{ab}, V_{ab} - momento flector y fuerza cortante en el apoyo a;

M_{ba}, V_{ba} - momento flector y fuerza cortante en el apoyo b;

M'_{ab}, M''_{ab}, V'_{ab}, V''_{ab} - fuerzas internas en la viga, debido a la acción externa y se determinan por la tabla 6.1.

Si la carga o momento puntual están ubicados en los nudos del pórtico, entonces ellos no influenciarán en el cálculo de M'_{ab}, V'_{ab}, M''_{ab}, V''_{ab} de las barras que convergen en dicho nudo.

Se considera que el momento flector es positivo, si en el nudo actúa en sentido antihorario y en la barra en sentido horario (figura 6.3). La fuerza cortante es positiva, si hace girar al nudo y a la barra en sentido horario (figura 6.4). Los ángulos de giro φ de los nudos y los ángulos de desviación ψ de las barras, se consideran positivos en sentidos horarios.

Para formular cada ecuación, será necesario igualar a cero la reacción en la conexión adicional. Si la conexión analizada es un empotramiento elástico, entonces será necesario hacer un corte en el nudo que tiene esta conexión y la suma de los momentos en todas las vigas que convergen en dicho nudo (fórmulas 6.1, 6.2 y 6.5) será igual a cero. En el caso, que se desee

analizar la barra adicional, será necesario hacer un corte en el pórtico, que incluya el nudo del desplazamiento impedido por el apoyo movible conectado al sistema y, de esta manera, se igualará a cero la suma de las fuerzas cortantes (fórmulas 6.3, 6.4, 6.7 y 6.8) de las barras cortadas y las cargas existentes en dicho sentido, incluyendo la reacción en el apoyo movible, que también es cero.



Fig. 6.3



Fig. 6.4

El sistema de ecuaciones del método de desplazamientos en la forma canónica es:

$$
\begin{aligned}
& r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ...+ r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0 \\
& r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ...+ r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ...+ r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0
\end{aligned}
\qquad (6.9)
$$

Donde:

r_{ik} - reacción (fuerza o momento) en la conexión adicional i del sistema principal, debido a $Z_k = 1$;

R_{iP} - reacción en la conexión adicional i debido a la acción de las cargas externas.

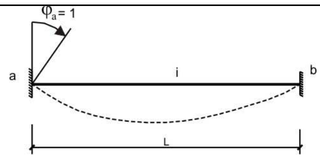
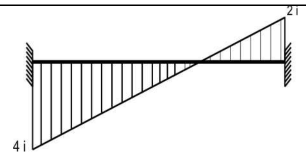
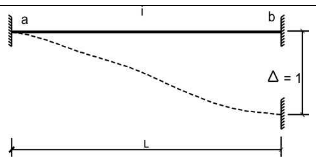
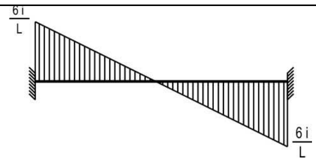
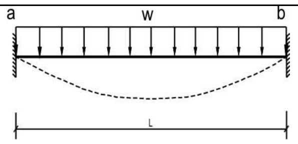
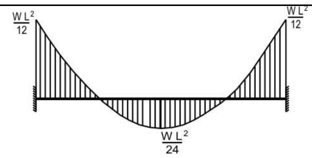
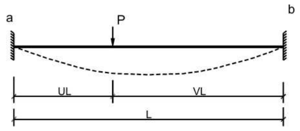
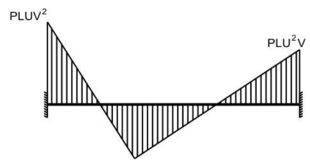
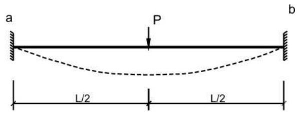
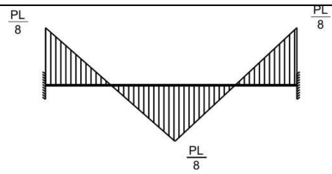
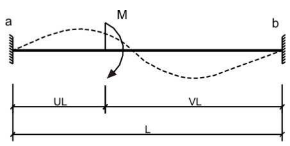
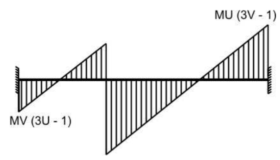
Para determinar los coeficientes y miembros libres del sistema de ecuaciones (fórmula 6.9), será necesario graficar previamente los diagramas de momento flector en el sistema principal del método de desplazamientos, debido a los valores unitarios de los desplazamientos desconocidos Z_1, Z_2, ………, Z_n y también debido a la carga externa aplicada en el pórtico. La construcción de los diagramas de momentos unitarios y de cargas, se efectuará con ayuda de las fórmulas de la tabla 6.1.

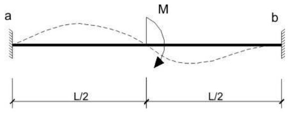
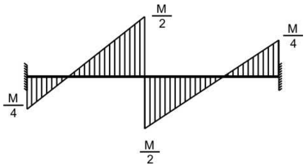
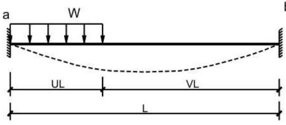
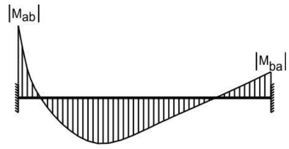
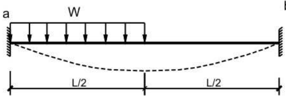
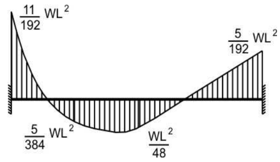
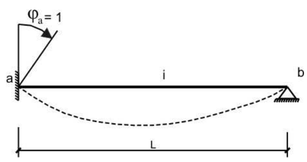
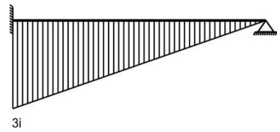
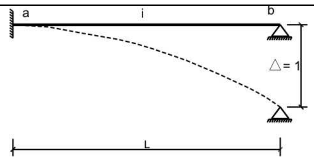
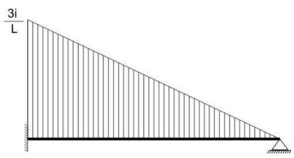
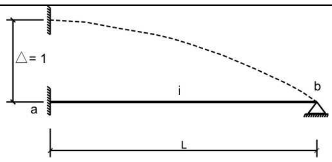
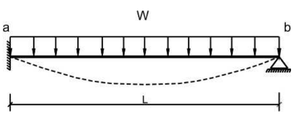
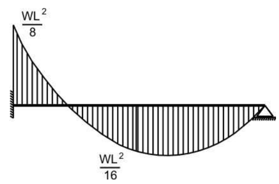
Las reacciones r_{ik} y R_{iP} en las conexiones adicionales, se determinan a partir de las condiciones de equilibrio de los nudos del pórtico (momentos en los empotramientos elásticos) o cortes del pórtico (reacciones en las barras adicionales o apoyos). Para ello, la orientación de la reacción se considera positiva, si concuerda con la dirección del desplazamiento dado en la construcción del diagrama unitario.

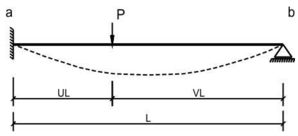
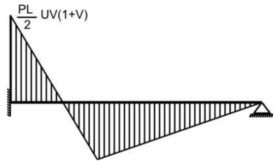
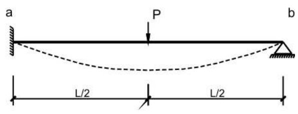
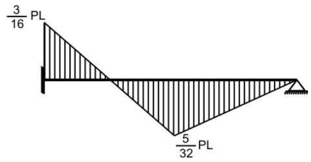
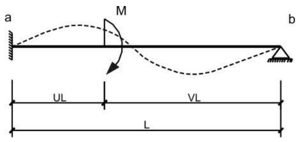
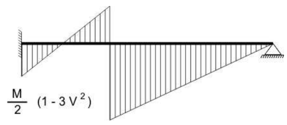
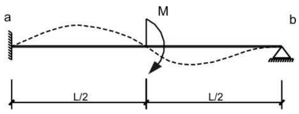
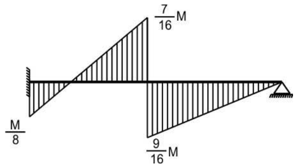
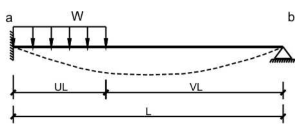
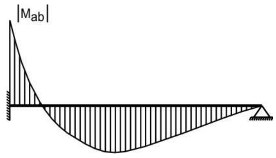
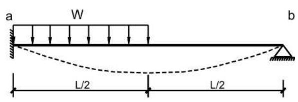
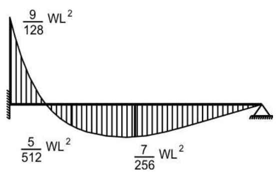
El sistema de ecuaciones del método de desplazamientos, obtenidos tanto en la forma canónica, como en la forma descompuesta, contienen coeficientes en la diagonal principal, los cuales son positivos, es decir $r_{ii} > 0$. Los coeficientes ubicados en forma simétrica en el sistema de ecuaciones, son iguales, esto quiere decir, que $r_{ik} = r_{ki}$. En consecuencia, la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones siempre será simétrica.

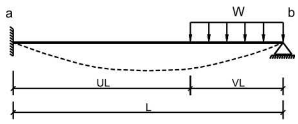
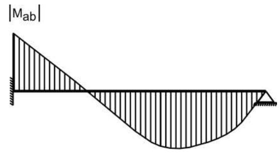
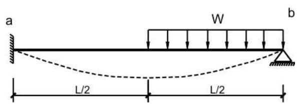
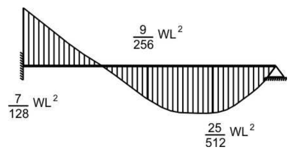
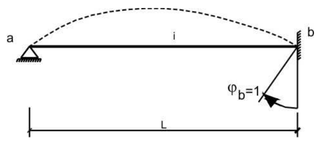
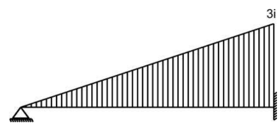
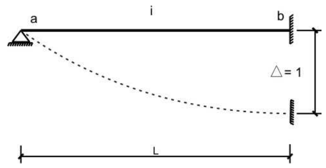
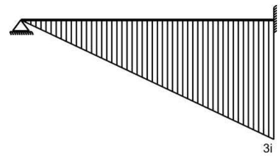
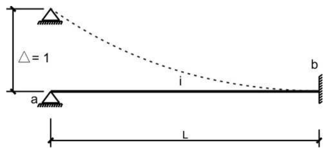
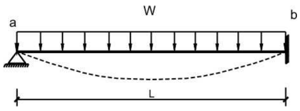
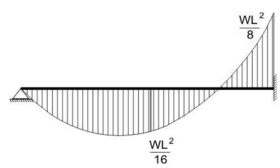
La solución del sistema de ecuaciones permite determinar los ángulos de giro y desplazamientos lineales de los nudos del pórtico dado, los cuales a su vez permitirán graficar los diagramas finales de fuerzas internas para el pórtico hiperestático dado.

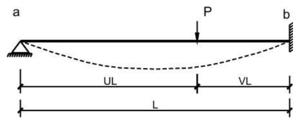
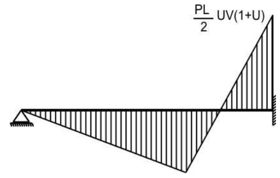
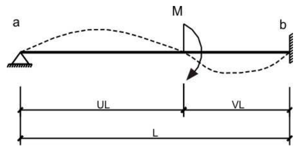
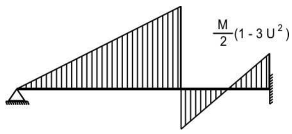
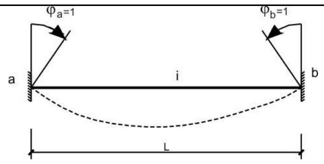
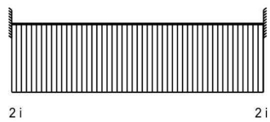
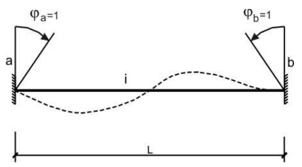
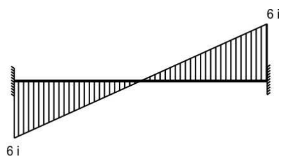
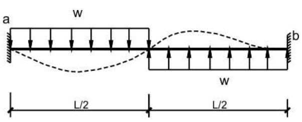
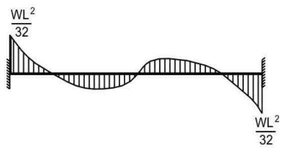
Tabla 6.1

Momentos en los apoyos de vigas hiperestáticas de un solo tramo			
Nº	Esquema de la viga y cargas	Fórmulas de cálculo	Diagrama de momento flector
1		$M_{ab} = 4i$ $M_{ba} = 2i$ $V_{ab} = V_{ba} = -\frac{6i}{L}$	
2		$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6i}{L}$ $V_{ab} = V_{ba} = \frac{12i}{L^2}$	
3		$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{wL^2}{12}$ $V'_{ab} = -V'_{ba} = \frac{wL}{2}$	
4		$M'_{ab} = -PLuv^2$ $M'_{ba} = PLu^2v$ $V'_{ab} = Pv^2(1+2u)$ $V'_{ba} = -Pu^2(1+2v)$	
5		$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{PL}{8}$ $V'_{ab} = -V'_{ba} = \frac{P}{2}$	
6		$M'_{ab} = Mv(3u-1)$ $M'_{ba} = Mu(3v-1)$ $V'_{ab} = V'_{ba} = -\frac{6M}{L}uv$	

7		$M'_{ab} = M'_{ba} = \frac{M}{4}$ $V'_{ab} = V'_{ba} = -\frac{1,5M}{L}$	
8		$M'_{ab} = -\frac{wL^2}{6}u^2(3-4u+1,5u^2)$ $M'_{ba} = \frac{wL^2}{6}u^3(2-1,5u)$	
9		$M'_{ab} = -\frac{11}{192}wL^2$ $M'_{ba} = \frac{5}{192}wL^2$ $V'_{ab} = \frac{13}{32}wL$ $V'_{ba} = -\frac{3}{32}wL$	
10		$M_{ab} = 3i$ $M_{ba} = 0$ $V_{ab} = V_{ba} = -\frac{3i}{L}$	
11a		$M_{ab} = -\frac{3i}{L}$ $M_{ba} = 0$ $V_{ab} = V_{ba} = \frac{3i}{L^2}$	
11b			
12		$M''_{ab} = -\frac{wL^2}{8}$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{5}{8}wL$ $V''_{ba} = -\frac{3}{8}wL$	

13		$M''_{ab} = -\frac{PL}{2} uv(1+v)$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{Pv}{2}(3-v^2)$ $V''_{ba} = -\frac{Pu^2}{2}(3-u)$	
14		$M''_{ab} = -\frac{3}{16} PL$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{11}{16} P$ $V''_{ba} = -\frac{5}{16} P$	
15		$M''_{ab} = \frac{M}{2}(1-3v^2)$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = V''_{ba} = -\frac{1{,}5M}{L}(1-v^2)$	
16		$M''_{ab} = \frac{M}{8}$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = V''_{ba} = -\frac{9}{8} M$	
17		$M''_{ab} = -\frac{wL^2}{8} u^2(2-u)^2$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{wL}{8}\left[8u - u^3(3+v)\right]$ $V''_{ba} = -\frac{wL}{8} u^3(3+v)$	
18		$M''_{ab} = -\frac{9}{128} wL^2; \quad M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{57}{128} wL; V''_{ba} = -\frac{7}{128} wL$	

19		$M''_{ab} = -\frac{wL^2}{8} v^2 (2 - v^2)$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{wL}{8} v^2 (6 - v^2)$ $V''_{ba} = -\frac{wL}{8} v\left[8 - v(6 - v^2)\right]$	
20		$M''_{ab} = -\frac{7}{128} wL^2$ $M''_{ba} = 0$ $V''_{ab} = \frac{23}{128} wL$ $V''_{ba} = -\frac{41}{128} wL$	
21		$M_{ab} = 0$ $M_{ba} = 3i$ $V_{ab} = V_{ba} = -\frac{3i}{L}$	
22a		$M_{ab} = 0$ $M_{ba} = -\frac{3i}{L}$ $V_{ab} = V_{ba} = \frac{3i}{L^2}$	
22b			
23		$M''_{ab} = 0$ $M''_{ba} = \frac{wL^2}{8}$ $V''_{ab} = \frac{3}{8} wL$ $V''_{ba} = -\frac{5}{8} wL$	

24		$M''_{ab} = 0$ $M''_{ba} = \frac{PL}{2} uv(1+u)$ $V''_{ab} = \frac{Pv^2}{2}(3-v)$ $V''_{ba} = -\frac{Pu}{2}(3-u^2)$	
25		$M''_{ab} = 0$ $M''_{ba} = \frac{M}{2}(1-3u^2)$ $V''_{ab} = V''_{ba} = -\frac{1{,}5M}{L}(1-u^2)$	
26		$M_{ab} = -M_{ba} = 2i$ $V_{ab} = V_{ba} = 0$	
27		$M_{ab} = M_{ba} = 6i$ $V_{ab} = V_{ba} = -\frac{12i}{L}$	
28		$M'_{ab} = M'_{ba} = -\frac{wL^2}{32}$ $V'_{ab} = V'_{ba} = \frac{5}{16}wL$	

Nota: En la tabla 6.1, la rigidez por metro lineal i_{ab} y la luz L_{ab} de las vigas, son simbolizadas por i y L, respectivamente.

6.3 DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

Si se resuelve el problema en la forma descompuesta, entonces será necesario graficar previamente el diagrama de momentos en los nudos. Los momentos en los nudos se determinarán por las fórmulas 6.1, 6.2, 6.5 para los valores de los desplazamientos determinados del sistema de ecuaciones. En los tramos, donde existen cargas externas, será necesario agregar al diagrama de momentos en los nudos, el diagrama de momentos debido a la acción de las cargas externas, como si se tratase de una viga simplemente apoyada sometida a dichas cargas.

En caso se utilice la forma canónica, el diagrama final de momento flector se construirá como una suma de diagramas, de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$M_F = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + ...+ \overline{M}_n Z_n + M_P \qquad (6.10)$$

Donde:

$\overline{M}_1, \overline{M}_2, ..., \overline{M}_n$ - diagramas de momento flector en el sistema principal, debido a los valores unitarios de los desplazamientos desconocidos $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$, ……, $Z_n = 1$.

M_P - diagrama de momento flector en el sistema principal debido a la acción de la carga externa.

6.4 DIAGRAMA FINAL DE FUERZA CORTANTE

Para graficar el diagrama de fuerza cortante, se utiliza la dependencia diferencial de la fuerza cortante en base al momento flector:

$$V = \frac{dM}{ds} \qquad (6.11)$$

En el tramo, donde el diagrama de momento flector es lineal, el valor numérico de la fuerza cortante se determina como la tangente del ángulo de desviación del diagrama M con el eje de la barra.

En el tramo, donde el diagrama M es curvo, la fuerza cortante puede ser calculada como la suma algebraica de dos fuerzas cortantes V_M y V^V. La cortante V_M se determinará igual que para el diagrama lineal de M, que une las ordenadas en los extremos del tramo. V^V es la fuerza cortante en la sección de la viga simplemente apoyada, sometida a la carga externa distribuida.

Si se resuelve el problema en forma canónica, las fuerzas cortantes pueden ser determinadas por las fórmulas 6.3, 6.4, 6.7, 6.8.

6.5 DIAGRAMA FINAL DE FUERZA AXIAL

Las fuerzas axiales o normales, se determinarán a partir de la condición de equilibrio de los nudos del pórtico. Para ello, a los nudos se les aplicará sus cargas externas, las fuerzas cortantes, así como las fuerzas axiales calculadas anteriormente.

Los nudos se deben de analizar en forma consecutiva, de tal manera, que en cada uno de ellos no debe haber más de dos fuerzas axiales desconocidas.

6.6 PARTICULARIDADES DEL CÁLCULO DE PORTICOS SIMETRICOS

En los pórticos simétricos, sometidos a cargas simétricas, sólo surgirán fuerzas y deformaciones simétricas. En base a ello, para su cálculo se deben de tomar desplazamientos simétricos desconocidos. Los desplazamientos que permiten deformaciones antisimétricas del pórtico, consecuentemente serán nulos.

Si las cargas son antisimétricas, entonces los desplazamientos desconocidos se deben de tomar también antisimétricos. Los desplazamientos que permiten una deformación simétrica, también son nulos.

Si sobre el pórtico actúa una carga general, entonces será necesario dividirlo en componentes simétricos y antisimétricos. El cálculo del pórtico ante cada componente se realiza en forma separada y el diagrama final resulta como la suma de ambos.

6.7 CALCULO DE PORTICO PLANO POR LA FORMA DESCOMPUESTA

Resolveremos el pórtico mostrado en la figura 6.5, sometido a las cargas indicadas. Para ello, calcularemos su esquema equivalente (figura 6.6), que se ha obtenido como resultado de la eliminación de los volados de las vigas y se los ha reemplazado por las reacciones equivalentes, actuantes en los puntos de unión con el pórtico.

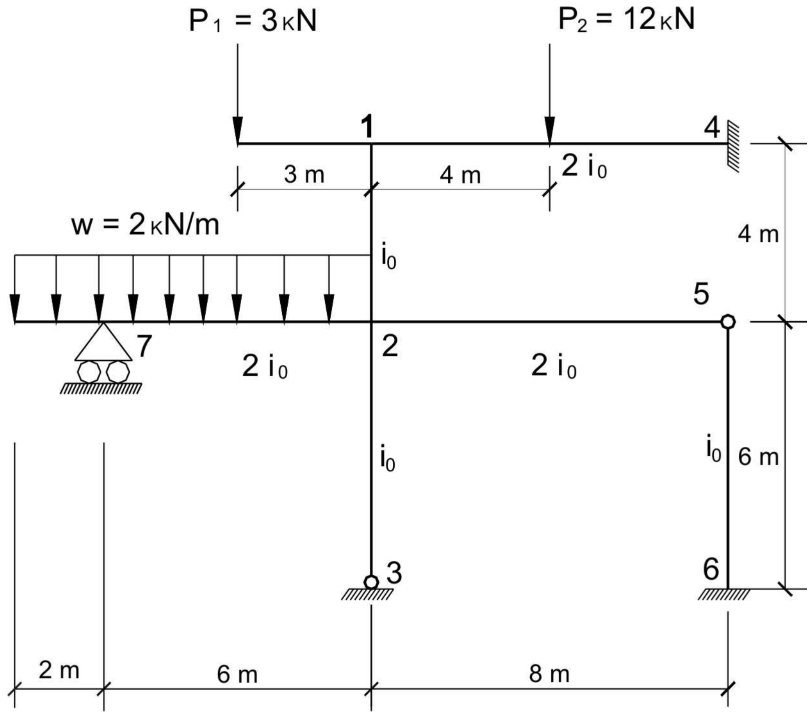


Fig. 6.5

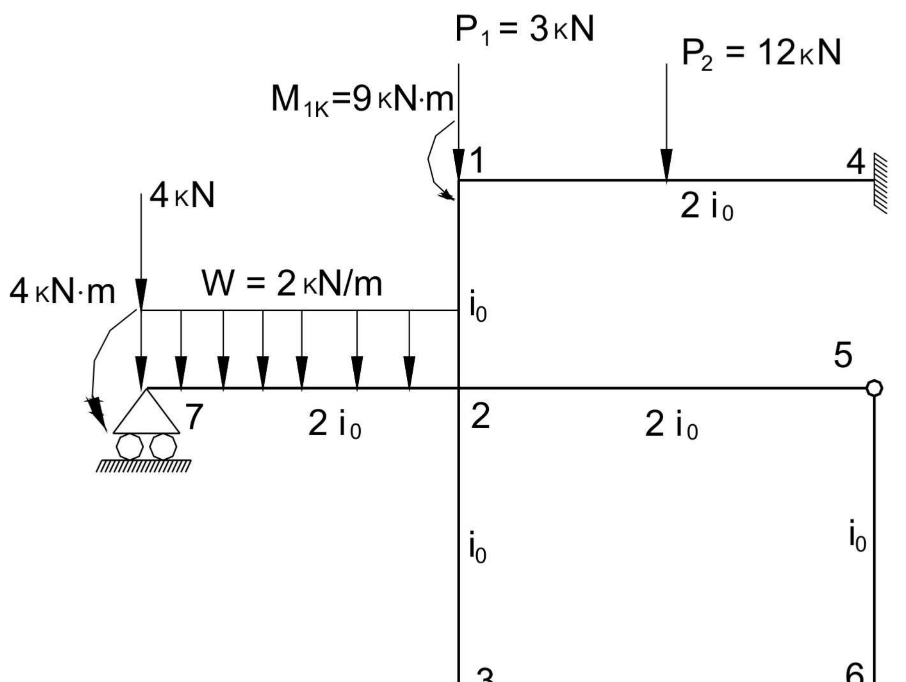


Fig. 6.6

GRADO DE INDETERMINACION

El pórtico dado tiene dos nudos rígidos. En consecuencia, el número de incógnitas de ángulos de giro es $n_n = 2(\varphi_1; \varphi_2)$.

Para determinar el número de desplazamientos lineales de los nudos, elaboraremos el esquema del pórtico con rótulas, ingresando articulaciones en los nudos rígidos (figura 6.7).

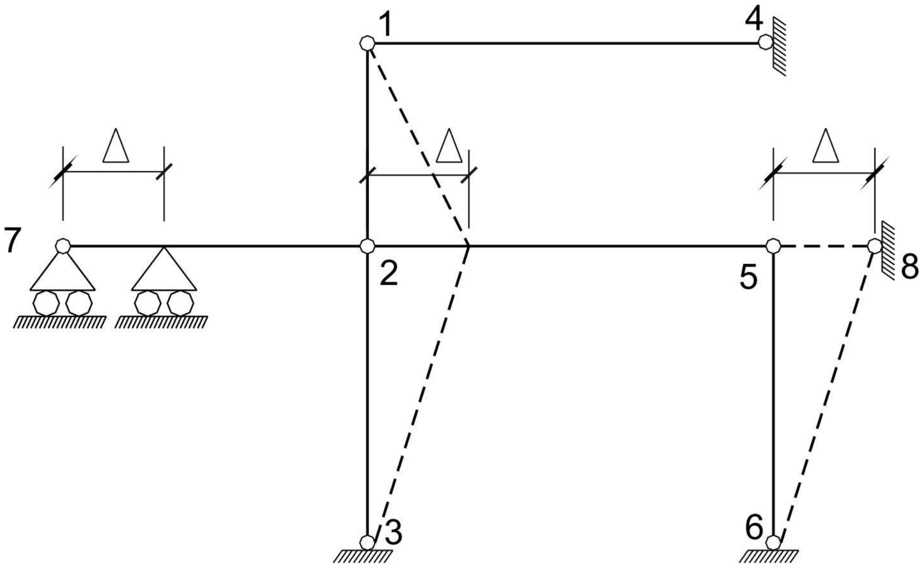


Fig. 6.7

Para convertirlo el esquema de rótulas en un sistema geométricamente invariable, será necesario ingresar una barra tipo apoyo, que impida el desplazamiento horizontal del nudo 5. De esta manera, el nudo 5 está unido por dos barras con los apoyos inmóviles 6 y 8; el nudo 2 con los nudos 3 y 5; el nudo 1 con los nudos 2 y 4 y, finalmente, el nudo 7 con el nudo 2 y la tierra. El desplazamiento lineal en la dirección de la barra adicional, viene a ser el desplazamiento lineal desconocido Δ, esto quiere decir $n_d = 1$.

De esta forma, el grado de indeterminación es:

$$n = n_n + n_d = 2 + 1 = 3$$

Los ángulos de desviación de las barras del pórtico se expresarán en función del desplazamiento lineal desconocido Δ. Para ello, desplazamos el nudo 5 en la dirección del desplazamiento desconocido y mostramos las deformaciones del esquema del pórtico con rótulas (figura 6.7).

Entonces, se tendrá que:

$$\psi_{12} = -\frac{\Delta}{4}$$

$$\psi_{23} = \psi_{56} = \frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{14} = \psi_{27} = \psi_{25} = 0$$

SISTEMA PRINCIPAL

Esquematizamos el sistema principal del método de desplazamientos (figura 6.8), ingresando en los nudos rígidos 1 y 2 los empotramientos elásticos, que impiden los probables ángulos de giro de estos nudos. También se ingresó la barra adicional que impide el desplazamiento lineal de los nudos del pórtico.

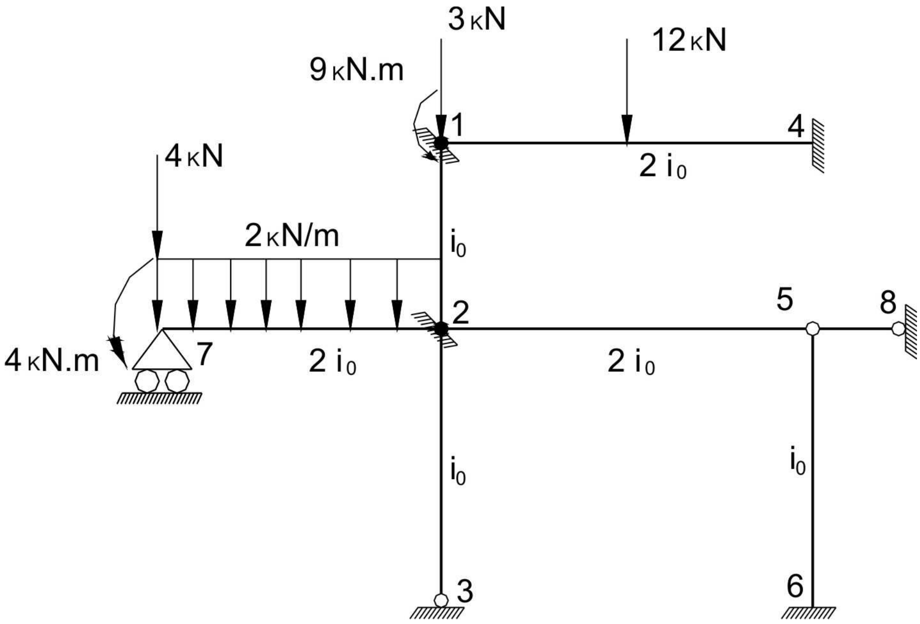
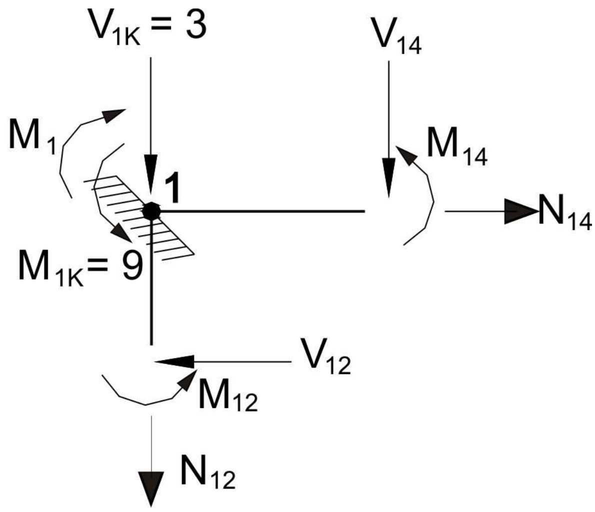


Fig. 6.8

SISTEMA DE ECUACIONES

La primera ecuación se obtiene a partir de la condición de igualdad a cero del momento de reacción en el empotramiento elástico del nudo 1.



$$\sum M_1 = 0$$

$$M_1 = M_{14} + M_{12} + 9 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para analizar el equilibrio del nudo, será necesario considerar todas las fuerzas externas e internas actuantes en el nudo. Las líneas de acción de las fuerzas axiales en las barras continuas, pasan a través del centro del nudo y las fuerzas cortantes se supone que actúan infinitamente cerca del centro del nudo y, en consecuencia, el momento de estas fuerzas es cero. Por ello, en lo sucesivo para elaborar las ecuaciones de los momentos respecto a los nudos, las fuerzas axiales y cortantes se pueden no mostrar.

Expresamos los momentos de la ecuación (a), a través de las incógnitas del método de desplazamientos por la fórmula 6.1 y con la ayuda de la tabla 6.1.

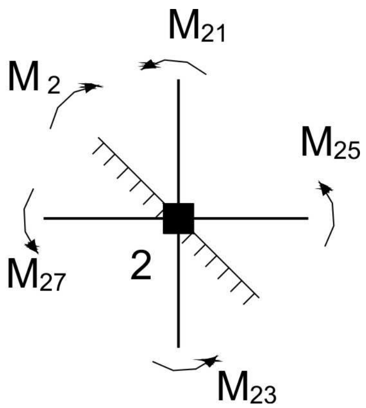
$$M_{14} = 2i_{14}(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{14}) + M'_{14} = 2.2i_0(2\varphi_1 + 0 - 0) - \frac{12.8}{8} = 8i_0\varphi_1 - 12$$

$$M_{12} = 2i_{12}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}) + M'_{12} = 2i_0\left(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3.\frac{\Delta}{4}\right) + 0 = 4i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1{,}5i_0\Delta$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (a) y obtenemos:

$$12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1{,}5i_0\Delta - 3 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Ahora elaboramos la segunda ecuación, igualando a cero el momento de reacción en el empotramiento elástico del nudo 2.



$$\sum M_2 = 0$$

$$M_2 = M_{21} + M_{25} + M_{23} + M_{27} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Expresamos los momentos de la ecuación (c), a través de las fórmulas 6.1 o 6.5, dependientes de las condiciones de extremos de las barras analizadas.

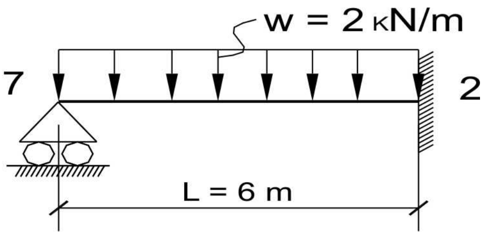
$$M_{21} = 2i_{21}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) + M'_{21} = 4i_0\varphi_2 + 2i_0\varphi_1 + 1{,}5i_0\Delta$$

$$M_{25} = 3i_{25}(\varphi_2 - \psi_{25}) + M''_{25} = 3.2i_0(\varphi_2 - 0) + 0 = 6i_0\varphi_2$$

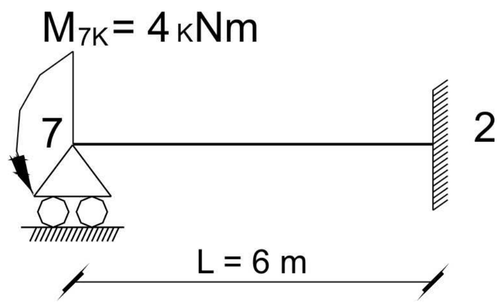
$$M_{23} = 3i_{23}(\varphi_2 - \psi_{23}) + M''_{23} = 3i_0\left(\varphi_2 - \frac{\Delta}{6}\right) + 0 = 3i_0\varphi_2 - 0{,}5i_0\Delta$$

$$M_{27} = 3i_{27}(\varphi_2 - \psi_{27}) + M''_{27} = 3.2i_0(\varphi_2 - 0) + \frac{2.6^2}{8} - \frac{4}{2}(1 - 3.0) = 6i_0\varphi_2 + 7$$

El momento M''_{27} se determina por la tabla 6.1, como la suma de momentos en el empotramiento de la viga con el otro apoyo movible, debido a la acción de la carga uniformemente distribuida y el momento en el apoyo movible.



$$M''_{27} = \frac{wL^2}{8}$$



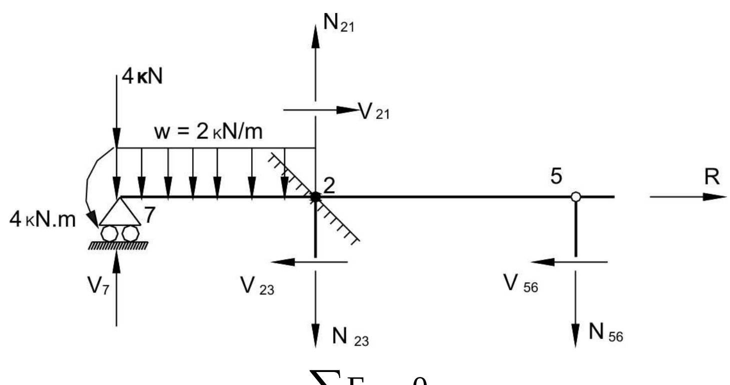
$$uL = 0$$

$$M''_{27} = -\frac{M}{2}\left(1 - 3u^2\right)$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (c) y obtenemos:

$$2i_0\varphi_1 + 19i_0\varphi_2 + i_0\Delta + 7 = 0 \qquad \text{(d)}$$

Ahora, elaboramos la tercera ecuación, a partir de la condición de igualdad a cero de la reacción en la barra adicional. Para ello, efectuamos un corte en el pórtico, analizando la parte de la barra adicional que impide el desplazamiento lineal y escribimos la ecuación de equilibrio de la parte cortada del pórtico a analizar, en función de las fuerzas horizontales.



$$\sum F_X = 0$$

$$R + V_{21} - V_{23} - V_{56} = 0$$

$$R = -V_{21} + V_{23} + V_{56} \qquad \text{(e)}$$

Expresamos la fuerza cortante de la ecuación (e), a través de las fórmulas 6.3, 6.7, 6.8; dependientes de las condiciones de extremos de las barras indicadas.

$$V_{21} = -\frac{6i_{21}}{L_{21}}\left(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\psi_{21}\right) + V_{21}^{'} = -\frac{6i_0}{4}\left(\varphi_2 + \varphi_1 + 2\frac{\Delta}{4}\right) + 0 = -1{,}5i_0\varphi_2 - 1{,}5i_0\varphi_1 - 0{,}75i_0\Delta$$

$$V_{23} = -\frac{3i_{23}}{L_{23}}\left(\varphi_2 - \psi_{23}\right) + V_{23}^{''} = -\frac{3i_0}{6}\left(\varphi_2 - \frac{\Delta}{6}\right) + 0 = -0{,}5i_0\varphi_2 + \frac{1}{12}i_0\Delta$$

$$V_{56} = -\frac{3i_{56}}{L_{56}}\left(\varphi_6 - \psi_{56}\right) + V_{56}^{''} = -\frac{3i_0}{6}\left(0 - \frac{\Delta}{6}\right) + 0 = \frac{1}{12}i_0\Delta$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación (e) y obtenemos:

$$1{,}5i_0\varphi_1 + i_0\varphi_2 + 0{,}9167i_0\Delta = 0 \qquad \text{(f)}$$

De esta manera tenemos un sistema de tres ecuaciones:

$$12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1{,}5i_0\Delta - 3 = 0$$

$$2i_0\varphi_1 + 19i_0\varphi_2 + i_0\Delta + 7 = 0$$

$$1{,}5i_0\varphi_1 + i_0\varphi_2 + 0{,}9167i_0\Delta = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos:

$$i_0\varphi_1 = 0{,}3294$$

$$i_0\varphi_2 = -0{,}3976$$

$$i_0\Delta = -0{,}1054$$

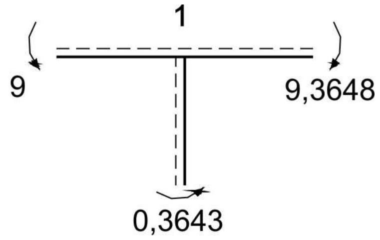
Comprobamos la veracidad de los resultados, reemplazando los valores obtenidos en la suma de las ecuaciones, es decir:

$$15{,}5i_0\varphi_1 + 22i_0\varphi_2 + 3{,}4167i_0\Delta + 4 = 0$$

$$15{,}5(0{,}3294) + 22(-0{,}3976) + 3{,}4167(-0{,}1054) + 4 = 9{,}1057 - 9{,}1073 = -0{,}0016 \approx 0$$

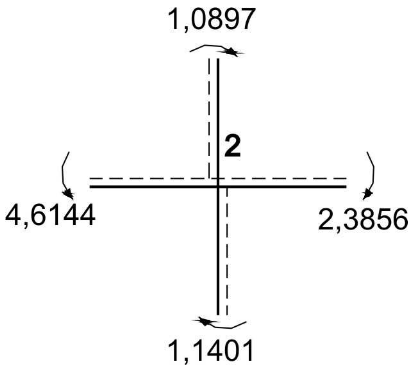
MOMENTOS FLECTORES EN LOS NUDOS

Se obtienen reemplazando los valores obtenidos en las fórmulas 6.1, 6.5 y los colocamos en los nudos del pórtico de acuerdo a sus signos. Los momentos son positivos si giran en sentido antihorario. En los esquemas de los nudos, se muestran en forma punteada las zonas traccionadas.



$$M_{14} = 8i_0\varphi_1 - 12 = 8.0{,}3294 - 12 = -9{,}3648\text{kN.m}$$

$$M_{12} = 4i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1{,}5i_0\Delta = 4.0{,}3294 - 2.0{,}3976 - 1{,}5.0{,}1054 = 0{,}3643\text{kN.m}$$

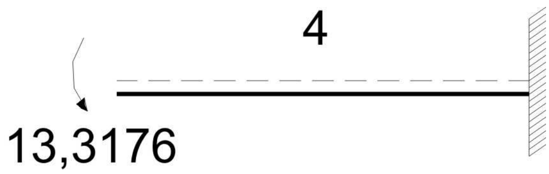


$$M_{21} = 4i_0\varphi_2 + 2i_0\varphi_1 + 1{,}5i_0\Delta = -4.0{,}3976 + 2.0{,}3294 - 1{,}5.0{,}1054 = -1{,}0897\text{kN.m}$$

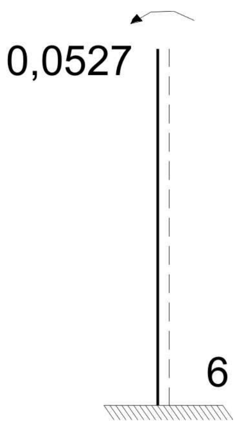
$$M_{23} = 3i_0\varphi_2 - 0{,}5i_0\Delta = -3.0{,}3976 + 0{,}5.0{,}1054 = -1{,}1401\text{kN.m}$$

$$M_{25} = 6i_0\varphi_2 = -6.0{,}3976 = -2{,}3856\text{kN.m}$$

$$M_{27} = 6i_0\varphi_2 + 7 = -6.0{,}3976 + 7 = 4{,}6144\text{kN.m}$$



$$M_{41} = 2i_{41}(2\varphi_4 + \varphi_1 - 3\psi_{41}) + M'_{41} = 2.2i_0\varphi_1 + \frac{12.8}{8} = 4.0{,}3294 + 12 = 13{,}3176\text{kN.m}$$



$$M_{65} = 3i_{65}(\varphi_6 - \psi_{65}) + M''_{65} = 3i_0\left(0 - \frac{\Delta}{6}\right) = -0{,}5.(-0{,}1054) = 0{,}0527\text{kN.m}$$

DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

De acuerdo a los resultados obtenidos, graficamos el diagrama de momentos en los nudos (figura 6.9) y en las barras cargadas, agregamos el diagrama de una viga simplemente apoyada sometida a las cargas externas (figura 6.10), obteniéndose el diagrama final de momento flector (figura 6.11).

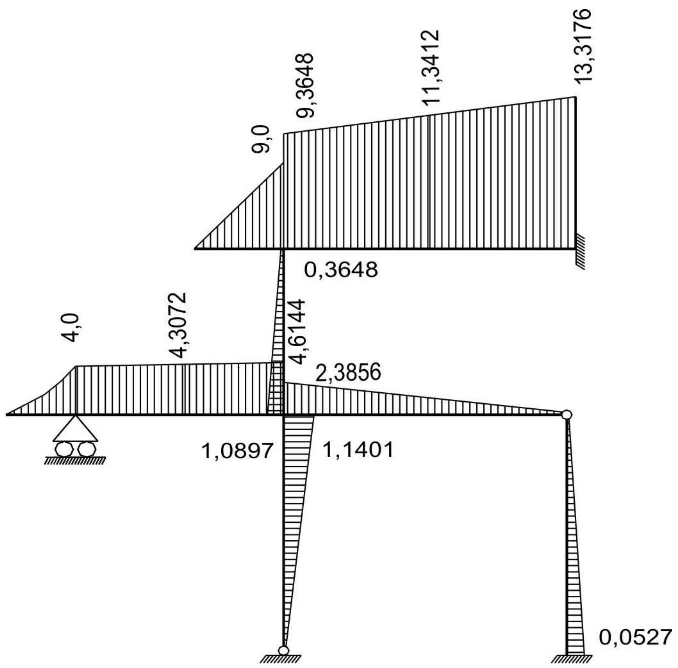


Fig. 6.9 Diagrama de momentos en los nudos

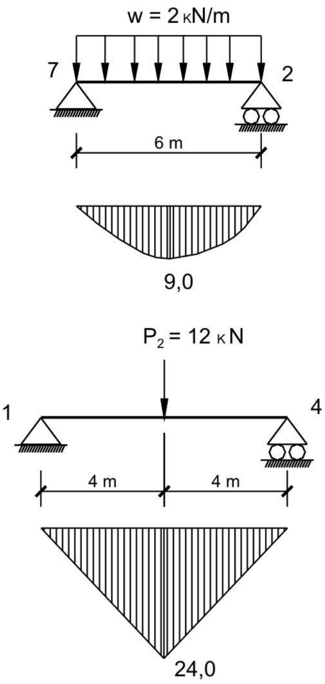


Fig. 6.10 Diagramas en las barras cargadas

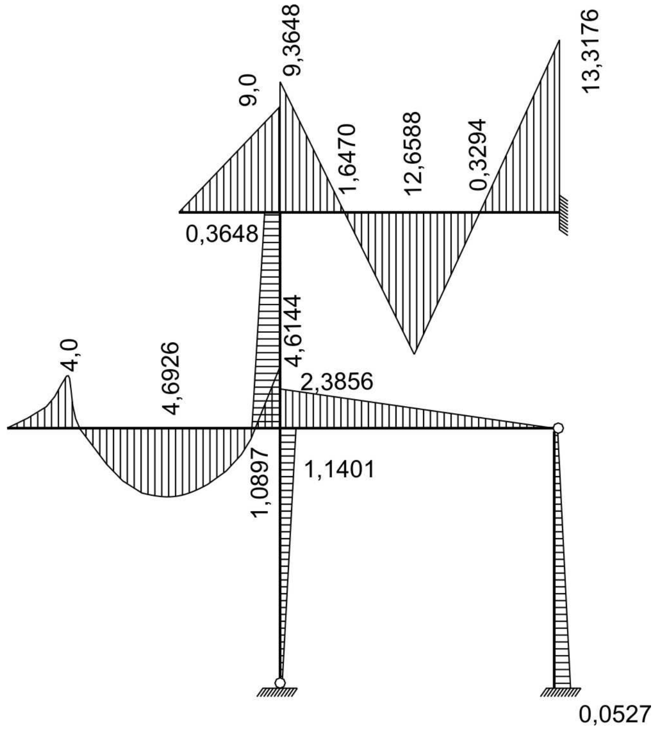


Fig. 6.11 Diagrama M_F

COMPROBACION CINEMATICA O DE DEFORMACION

Para efectuar la comprobación cinemática elegimos un sistema principal del método de las fuerzas (figura 6.12) y graficamos el diagrama unitario $\overline{M}_S$ de la acción conjunta de varias incógnitas del método de las fuerzas, que permitan tener diagramas en todas las barras del pórtico (figura 6.13).

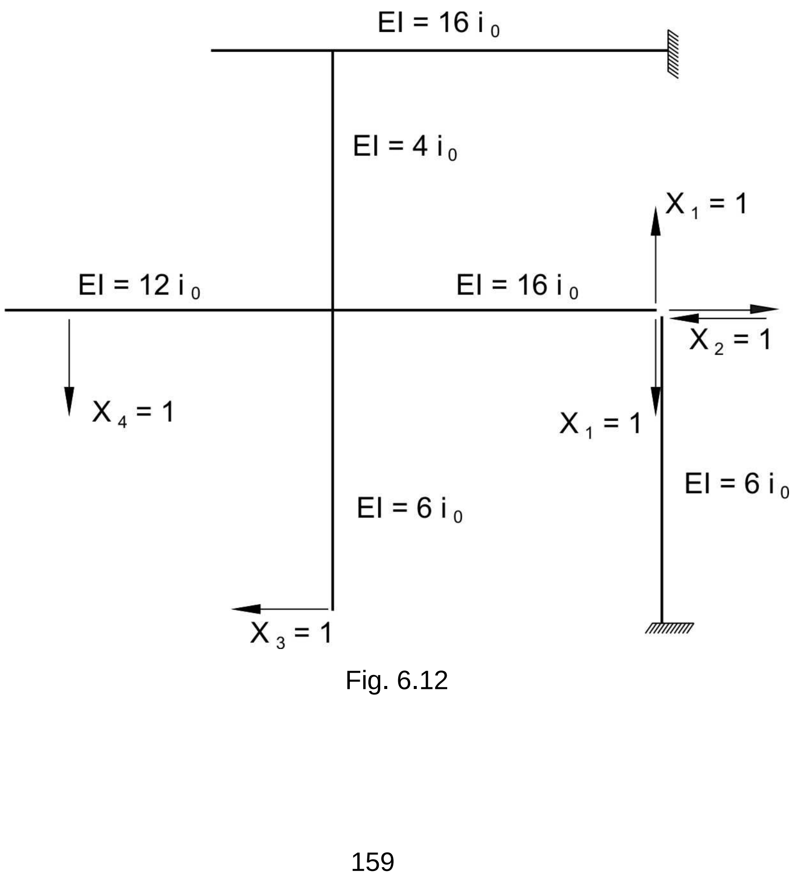


Fig. 6.12

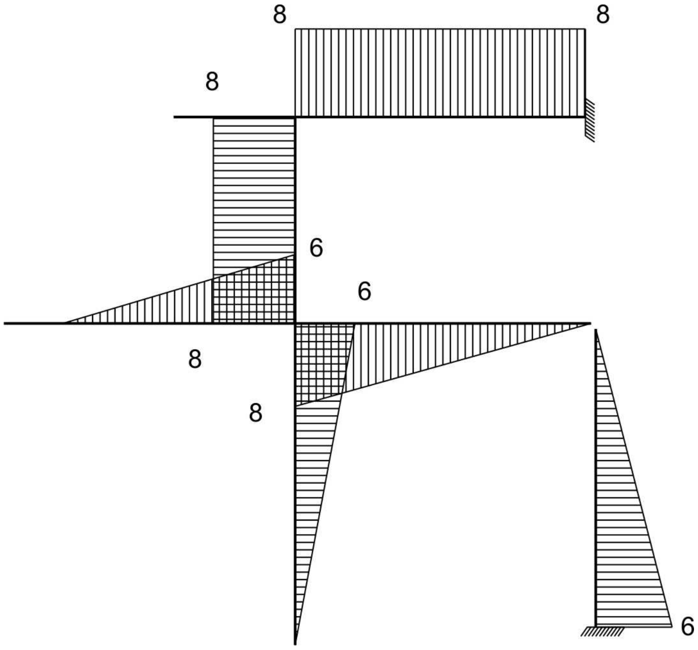


Fig. 6.13 Diagrama $\overline{M}_S$

La suma de desplazamientos se determina por la fórmula de Maxwell – Mohr:

$$\Delta_{SF} = \sum \int \frac{\overline{M}_S M_F}{EI} dx$$

Para ello, previamente expresamos la rigidez de las barras, a través de la rigidez por metro lineal.

$$(EI)_{ab} = i_{ab}.L_{ab}$$

La integración lo efectuamos por el método de Vereschaguin o la fórmula de Simpson – Kornoujov.

De esta manera, se tendrá:

$$\Delta_{SF} = \frac{6}{12i_0.6}(-4.3.4,6928 + 6.4,6144) + \frac{1}{6i_0}.\frac{1}{2}.1,1401.6.\frac{2}{3}.6 - \frac{1}{16i_0}.\frac{1}{2}.2,3856.8.\frac{2}{3}.8 +$$

$$+\frac{1}{6i_0}.\frac{1}{2}.0,0527.6.\frac{2}{3}.6 + \frac{1}{4i_0}.0,7273.4.8 - \frac{1}{16i_0}.1,6470.4.8 + \frac{1}{16i_0}.0,3294.4.8$$

$$\Delta_{SF} = (8,8628 - 8,8604).\frac{1}{i_0} = 0,0024\frac{1}{i_0} \approx 0$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,0024}{8,8628}.100\% = 0,027\%$$

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA CORTANTE

Calculamos las fuerzas cortantes en los extremos de las barras, utilizando las fórmulas 6.3, 6.4, 6.7 y 6.8.

$$V_{21} = -1,5i_0\varphi_2 - 1,5i_0\varphi_1 - 0,75i_0\Delta = 1,5.0,3976 - 1,5.0,3294 + 0,75.01054 = 0,1814kN$$

$$V_{23} = -0{,}5i_0\varphi_2 + \frac{1}{12}i_0\Delta = 0{,}5.0{,}3976 - \frac{1}{12}.0{,}1054 = 0{,}1900kN$$

$$V_{56} = \frac{1}{12}i_0\Delta = -\frac{1}{12}.0{,}1054 = -0{,}0088kN$$

$$V_{14} = -1{,}5i_0\varphi_1 + 6 = -1{,}5.0{,}3294 + 6 = 5{,}5059kN$$

$$V_{41} = -1{,}5i_0\varphi_1 - 6 = -1{,}5.0{,}3294 - 6 = -6{,}4941kN$$

$$V_{25} = -0{,}75i_0\varphi_2 = 0{,}75.0{,}3976 = 0{,}2982kN$$

$$V_{27} = -i_0\varphi_2 - 7{,}5 + 1 = 0{,}3976 - 7{,}5 + 1 = -6{,}1024kN$$

$$V_{72} = -i_0\varphi_2 + 4{,}5 + 1 = 0{,}3976 + 4{,}5 + 1 = 5{,}8976kN$$

El diagrama final de fuerza cortante se muestra en la figura 6.14.

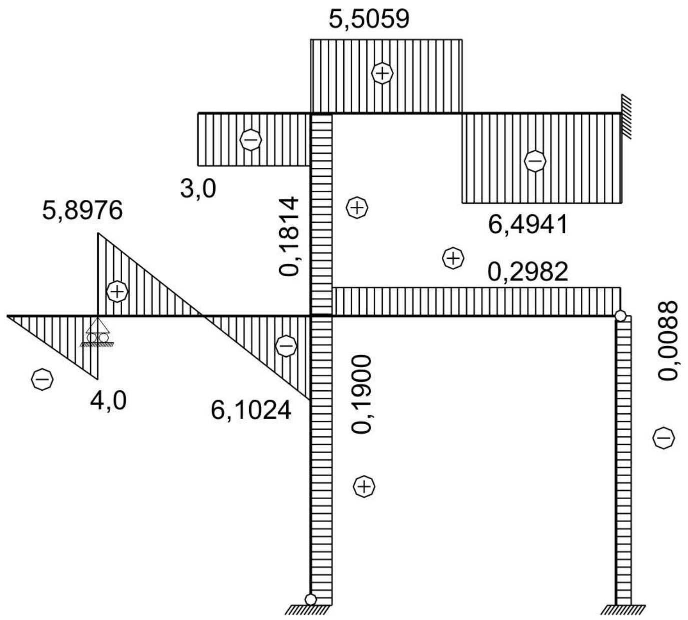


Fig. 6.14 Diagrama V_F

Efectuamos la comprobación del diagrama V_F, utilizando la dependencia diferencial entre los diagramas V_F y M_F:

$$V_{14} = \frac{9{,}3648 + 12{,}6588}{4} = 5{,}5059kN$$

$$V_{41} = -\frac{12{,}6588 + 13{,}3176}{4} = -6{,}4941kN$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{1{,}0897 - 0{,}3648}{4} = 0{,}1812kN$$

$$V_{23} = V_{32} = \frac{1{,}1401}{6} = 0{,}1900kN$$

$$V_{27} = -\frac{4,6144-4}{6} - \frac{2.6}{2} = -6,1024kN$$

$$V_{72} = -\frac{4,6144-4}{6} + \frac{2.6}{2} = 5,8976kN$$

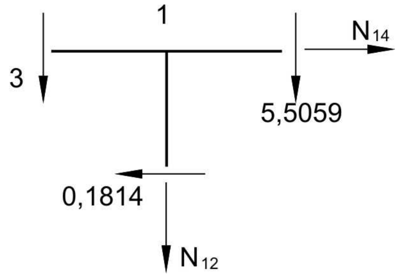
$$V_{25} = V_{52} = \frac{2,3856}{8} = 0,2982kN$$

$$V_{65} = V_{56} = -\frac{0,0527}{6} = -0,0088kN$$

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA AXIAL

Las fuerzas axiales las obtenemos a partir de la condición de equilibrio de los nudos. Para ello, colocamos las fuerzas cortantes anteriormente obtenidas y los aplicamos en los nudos, de acuerdo a la convención de signos (la fuerza cortante es positiva si gira al nudo en el sentido horario), así como las fuerzas axiales a determinar. Para facilidad de cálculo, orientamos las fuerzas axiales en el sentido positivo (sale del nudo).

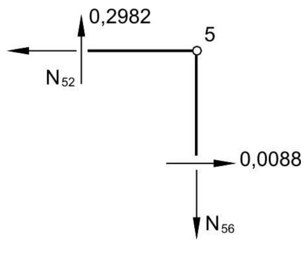
NUDO 1



$$\sum F_X = 0; \qquad N_{14} = 0,1814kN$$

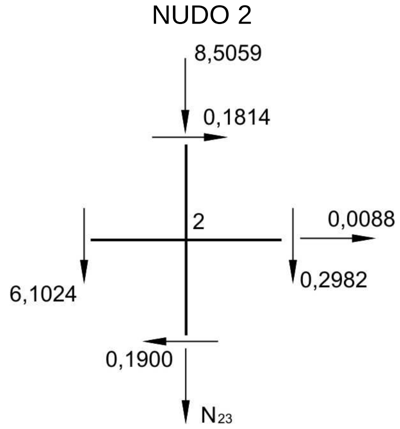
$$\sum F_Y = 0; \qquad N_{12} = -8,5059kN$$

NUDO 5



$$\sum F_X = 0; \qquad N_{52} = 0,0088kN$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad N_{56} = 0,2982kN$$



$$\sum F_X = 0; \qquad 0{,}1814 + 0{,}0088 - 0{,}1900 = 0{,}0002 \approx 0$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad N_{23} = -14{,}9065 kN$$

El diagrama final de fuerza axial o normal se muestra en la figura 6.15.

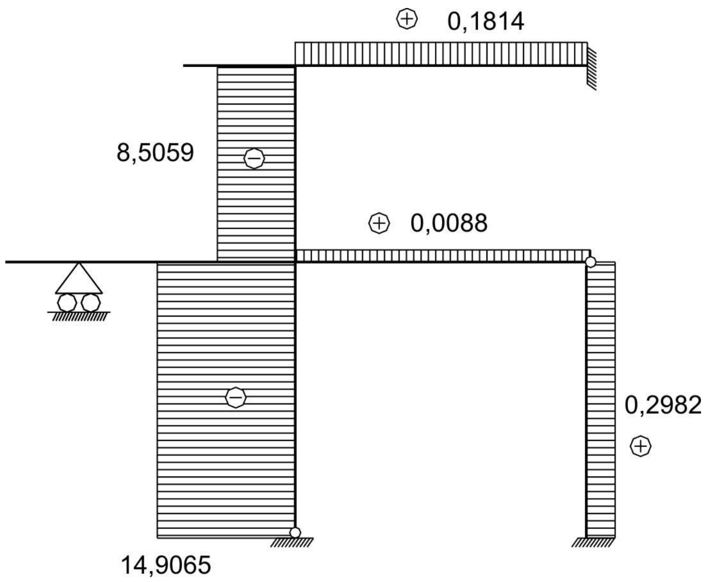


Fig. 6.15 Diagrama N_F

COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL

Eliminamos los apoyos y lo reemplazamos por sus reacciones, obtenidas a partir de los diagramas de las figuras 6.11, 6.14 y 6.15; obteniéndose el esquema de la figura 6.16.

Comprobamos si se cumplen las condiciones de equilibrio del pórtico.

$$\sum F_X = 0{,}1814 + 0{,}0088 - 0{,}1900 = 0{,}0002 \approx 0$$

$$\sum F_Y = -2.8 - 3 - 12 + 6{,}4941 + 9{,}8976 + 14{,}9065 - 0{,}2982 = 0$$

$$\sum M_A = -2.8.4 + 9{,}8976.6 - 3.3 + 12.4 + 13{,}3176 + 0{,}1814.10 - 6{,}4941.8 + 0{,}0527 + 0{,}2982.8$$

$$\sum M_A = 124,9555 - 124,9528 = 0,0027 \approx 0$$

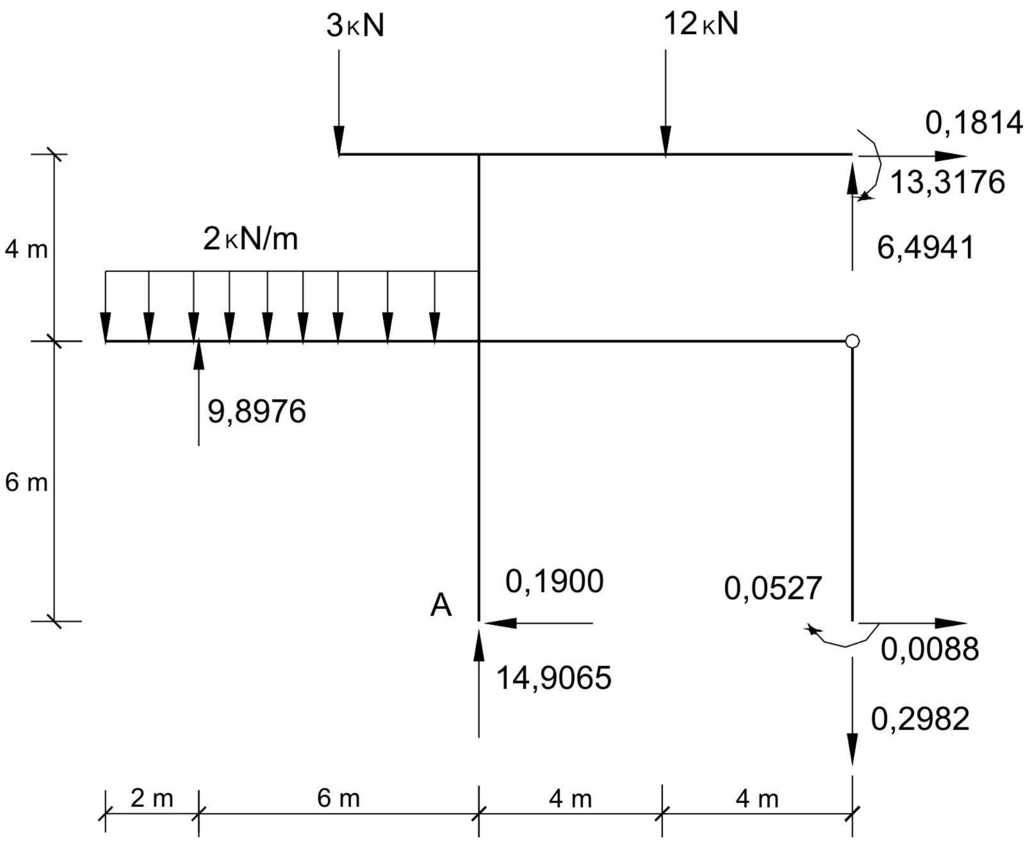


Fig. 6.16

6.8 CALCULO DE PORTICO SIMETRICO POR LA FORMA DESCOMPUESTA

Efectuar el cálculo del pórtico de la figura 6.17, graficando los diagramas M_F, V_F y N_F.

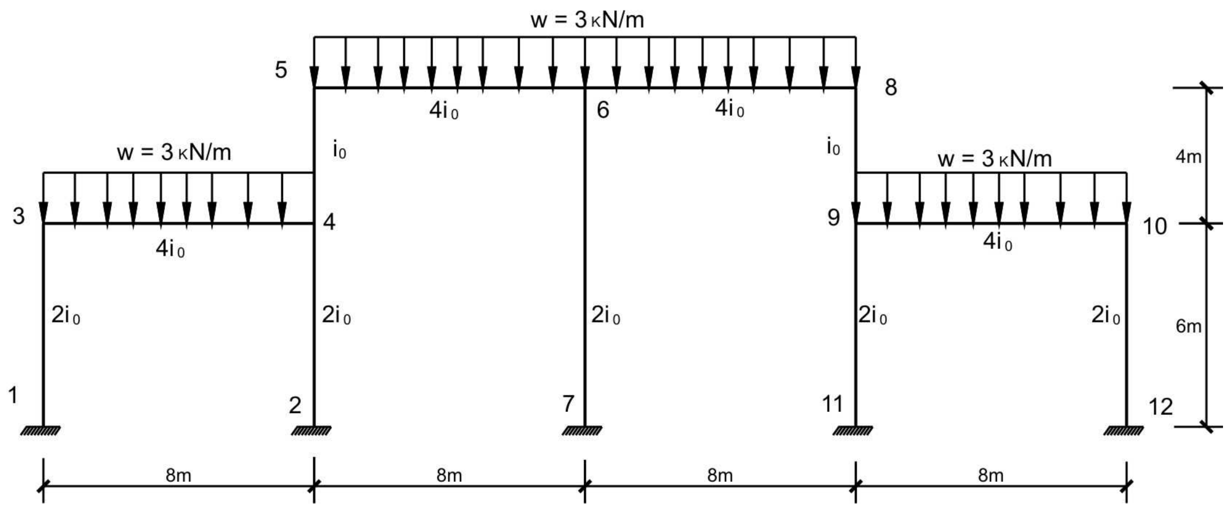


Fig. 6.17

GRADO DE INDETERMINACION

El pórtico tiene siete nudos rígidos, en consecuencia, los ángulos de giro desconocidos son φ_3, φ_4, φ_5, φ_6, φ_8, φ_9, φ_{10}.

Debido a la simetría del pórtico y de las cargas externas, entonces la deformación del pórtico también será simétrico, esto es $\varphi_{10} = -\varphi_3$, $\varphi_9 = -\varphi_4$, $\varphi_8 = -\varphi_5$, $\varphi_6 = 0$. De esta manera, producto de la simetría del pórtico tenemos tres ángulos de giro desconocidos $(n_d = 3)$: φ_3, φ_4 y φ_5.

Para determinar el número de desplazamientos lineales desconocidos, elaboramos el esquema del pórtico con rótulas (figura 6.18), introduciendo articulaciones en todos los empotramientos y nudos rígidos. El esquema de rótulas es un sistema tres veces geométricamente variable, en el cual hacen falta tres barras a nivel de entrepisos, que impidan los desplazamientos horizontales. Esto quiere decir, que el sistema tiene tres desplazamientos lineales desconocidos Δ_1, Δ_2 y Δ_3. Los esquemas de quiebre del pórtico debido a cada desplazamiento lineal en forma separada se muestran en la figura 6.18. Por cuanto, las deformaciones del pórtico no pueden variar la simetría, se puede decir, que $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = 0$. De esta manera, la simetría del pórtico tiene un desplazamiento lineal independiente $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. El esquema de los desplazamientos del pórtico se muestra en la figura 6.19.

En consecuencia, el pórtico indicado tiene cuatro incógnitas $(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \Delta)$ y exige la formulación y solución de un sistema de cuatro ecuaciones.

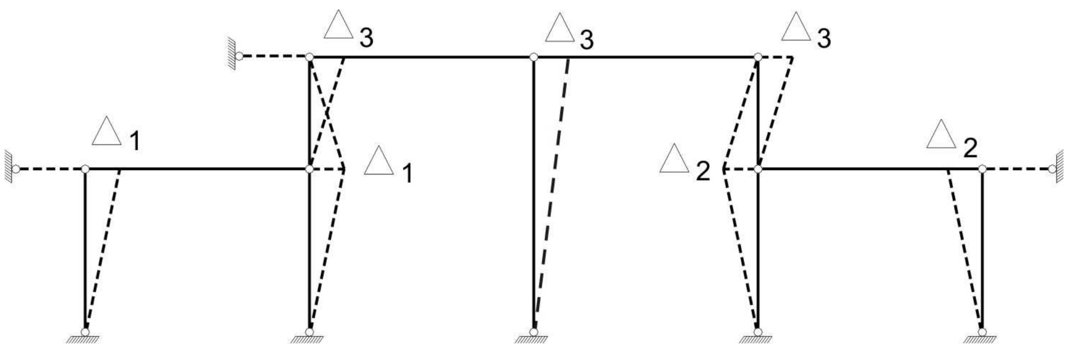


Fig. 6.18

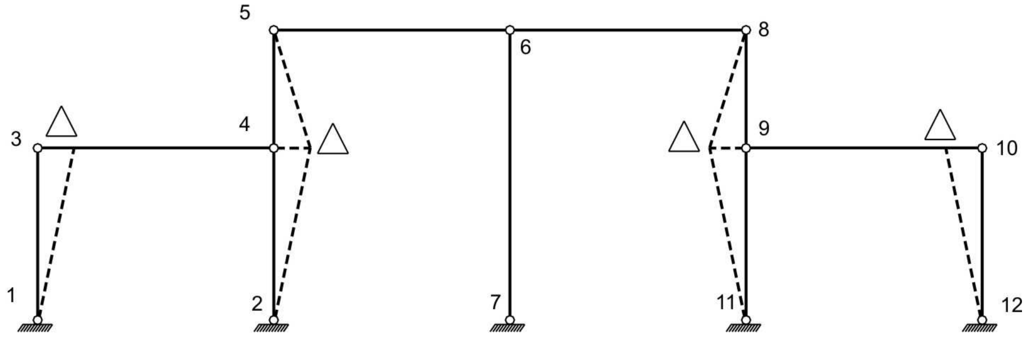


Fig. 6.19

SISTEMA PRINCIPAL

Elaboramos el sistema principal, introduciendo empotramientos elásticos en todos los nudos rígidos y la inclusión de tres barras adicionales en los nudos del pórtico, que impidan los probables desplazamientos lineales (figura 6.20).

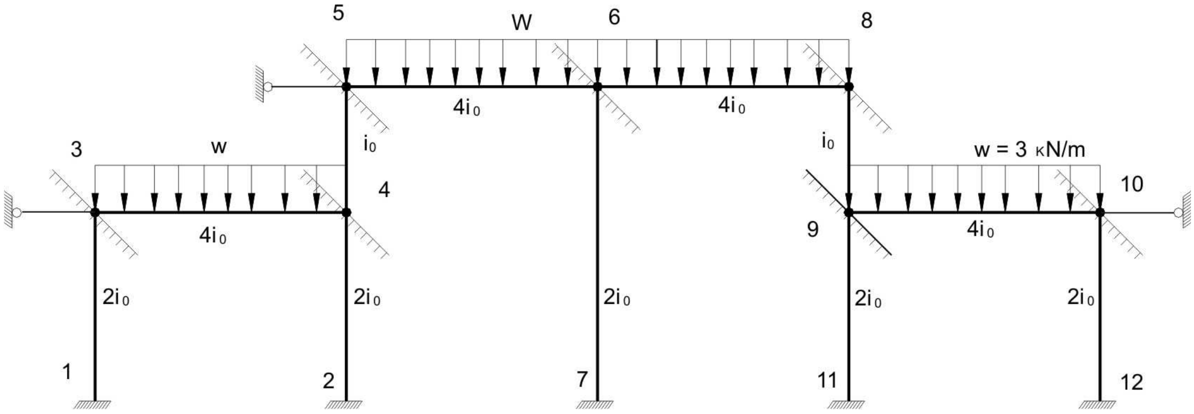
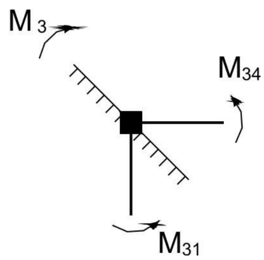


Fig. 6.20

SISTEMA DE ECUACIONES

Elaboramos las ecuaciones del método de desplazamientos, que expresen la igualdad a cero de las reacciones en las conexiones adicionales.

NUDO 3



$$M_3 = M_{31} + M_{34} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Los momentos de la ecuación (a) lo expresamos a través de los desplazamientos por la fórmula 6.1:

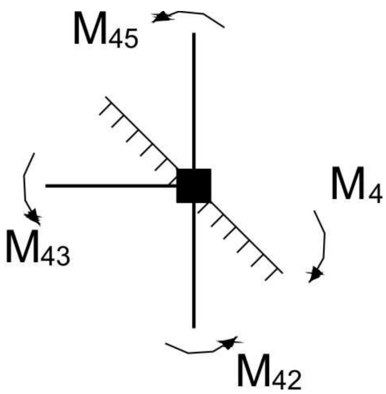
$$M_{31} = 2i_{31}(2\varphi_3 + \varphi_1 - 3\psi_{31}) + M'_{31} = 2.2i_0\left(2\varphi_3 + 0 - 3.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = 8i_0\varphi_3 - 2i_0\Delta$$

$$M_{34} = 2i_{34}(2\varphi_3 + \varphi_4 - 3\psi_{34}) + M'_{34} = 2.4i_0(2\varphi_3 + \varphi_4 - 0) - \frac{3.8^2}{12} = 16i_0\varphi_3 + 8i_0\varphi_4 - 16$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (a) y obtenemos:

$$M_3 = 24i_0\varphi_3 + 8i_0\varphi_4 - 2i_0\Delta - 16 = 0 \qquad \text{(b)}$$

NUDO 4



$$M_4 = M_{42} + M_{43} + M_{45} = 0 \qquad \text{(c)}$$

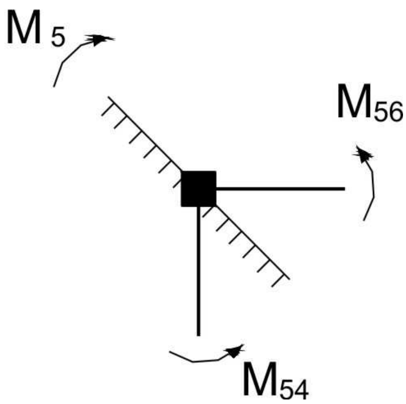
$$M_{42} = 2i_{42}(2\varphi_4 + \varphi_2 - 3\psi_{42}) + M'_{42} = 2.2i_0\left(2\varphi_4 + 0 - 3.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = 8i_0\varphi_4 - 2i_0\Delta$$

$$M_{43} = 2i_{43}(2\varphi_4 + \varphi_3 - 3\psi_{43}) + M'_{43} = 2.4i_0(2\varphi_4 + \varphi_3 - 0) + \frac{3.8^2}{12} = 16i_0\varphi_4 + 8i_0\varphi_3 + 16$$

$$M_{45} = 2i_{45}(2\varphi_4 + \varphi_5 - 3\psi_{45}) + M'_{45} = 2i_0\left(2\varphi_4 + \varphi_5 - 3.\left\{-\frac{\Delta}{4}\right\}\right) + 0 = 4i_0\varphi_4 + 2i_0\varphi_5 + 1{,}5i_0\Delta$$

$$M_4 = 8i_0\varphi_3 + 28i_0\varphi_4 + 2i_0\varphi_5 - 0{,}5i_0\Delta + 16 = 0 \qquad \text{(d)}$$

NUDO 5



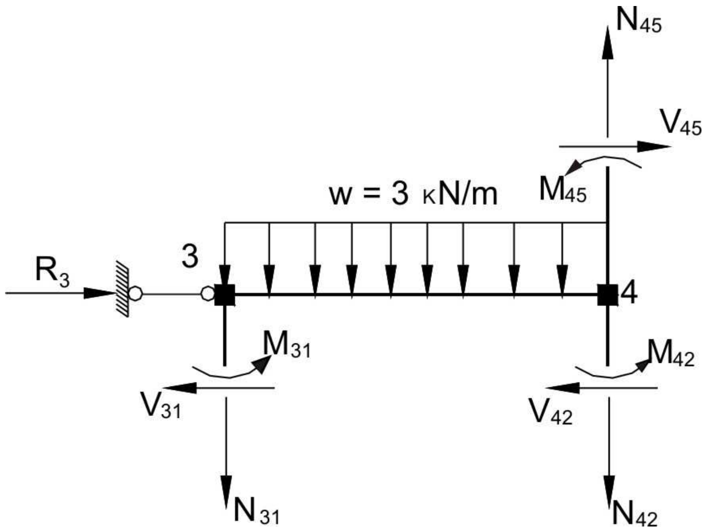
$$M_5 = M_{56} + M_{54} = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$M_{56} = 2i_{56}(2\varphi_5 + \varphi_6 - 3\psi_{56}) + M'_{56} = 2.4i_0(2\varphi_5 + 0 - 0) - \frac{3.8^2}{12} = 16i_0\varphi_5 - 16$$

$$M_{54} = 2i_{54}(2\varphi_5 + \varphi_4 - 3\psi_{54}) + M'_{54} = 2i_0\left(2\varphi_5 + \varphi_4 - 3\left\{-\frac{\Delta}{4}\right\}\right) + 0 = 4i_0\varphi_5 + 2i_0\varphi_4 + 1{,}5i_0\Delta$$

$$M_5 = 2i_0\varphi_4 + 20i_0\varphi_5 + 1{,}5i_0\Delta - 16 = 0 \qquad \text{(f)}$$

VIGA 3-4



A la parte cortada del pórtico, le agregamos las cargas y orientamos en forma positiva las fuerzas internas.

$$\sum F_X = 0; \qquad R_3 + V_{45} - V_{42} - V_{31} = 0$$

$$R_3 = -V_{45} + V_{42} + V_{31} = 0 \qquad \text{(g)}$$

Las fuerzas cortantes de la ecuación (g), lo expresamos a través de los desplazamientos de los nudos del pórtico por la fórmula 6.3:

$$V_{45} = -\frac{6i_{45}}{L_{45}}\left(\varphi_4 + \varphi_5 - 2\psi_{45}\right) + V'_{45} = -\frac{6i_0}{4}\left(\varphi_4 + \varphi_5 - 2\left\{-\frac{\Delta}{4}\right\}\right) + 0 = -1{,}5i_0\varphi_4 - 1{,}5i_0\varphi_5 - 0{,}75i_0\Delta$$

$$V_{42} = -\frac{6i_{42}}{L_{42}}\left(\varphi_4 + \varphi_2 - 2\psi_{42}\right) + V'_{42} = -\frac{6.2i_0}{6}\left(\varphi_4 + 0 - 2.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = -2i_0\varphi_4 + 0{,}6667i_0\Delta$$

$$V_{31} = -\frac{6i_{31}}{L_{31}}\left(\varphi_3 + \varphi_1 - 2\psi_{31}\right) + V'_{31} = -\frac{6.2i_0}{6}\left(\varphi_3 + 0 - 2.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = -2i_0\varphi_3 + 0{,}6667i_0\Delta$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (g) y obtenemos:

$$R_3 = -2i_0\varphi_3 - 0{,}5i_0\varphi_4 + 1{,}5i_0\varphi_5 + 2{,}0833i_0\Delta \qquad \text{(h)}$$

El sistema de ecuaciones obtenido es simétrico respecto a la diagonal principal, así como los coeficientes ubicados en la diagonal principal son positivos. Esto se nota claramente una vez trascritas las ecuaciones en la tabla 6.2.

Tabla 6.2

Ecuación	$i_0\varphi_3$	$i_0\varphi_4$	$i_0\varphi_5$	$i_0\Delta$	1
b	24	8	0	-2	-16
d	8	28	2	-0,5	16
f	0	2	20	1,5	-16
h	-2	-0,5	1,5	2,0833	0
Σ	30	37,5	23,5	1,0833	-16

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos los siguientes resultados:

$$i_0\varphi_3 = 0,9777$$

$$i_0\varphi_4 = -0,9124$$

$$i_0\varphi_5 = 0,8850$$

$$i_0\Delta = 0,0824$$

Para verificar los resultados, reemplazamos dichos valores en la ecuación de la suma de las anteriores, esto es:

$$30i_0\varphi_3 + 37,5i_0\varphi_4 + 23,5i_0\varphi_5 + 1,0833i_0\Delta - 16 = 0$$

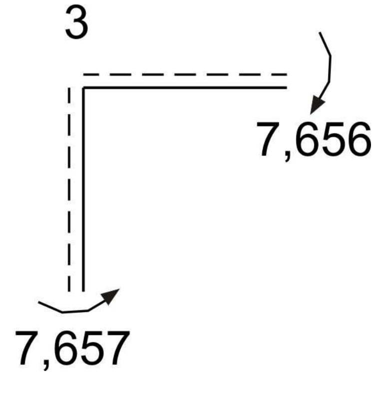
$$30.0,9777 + 37,5.(-0,9124) + 23,5.0,8850 + 1,0833.0,0824 - 16 = 50,2178 - 50,2150 = 0,0028 \approx 0$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,0028}{50,2178}.100\% = 0,005\%$$

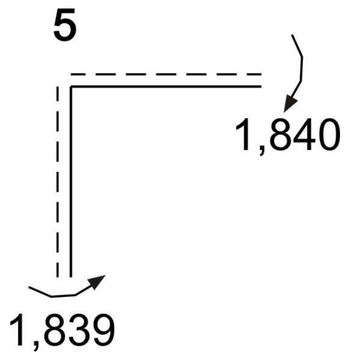
MOMENTOS FLECTORES EN LOS NUDOS

A través de la fórmula 6.1, calculamos los momentos flectores en los nudos y los ubicamos en cada nudo del pórtico, de acuerdo a la convención de signos, donde el momento es positivo si hace girar al nudo en sentido antihorario. En los esquemas de los nudos, las líneas punteadas muestran las zonas de tracción.



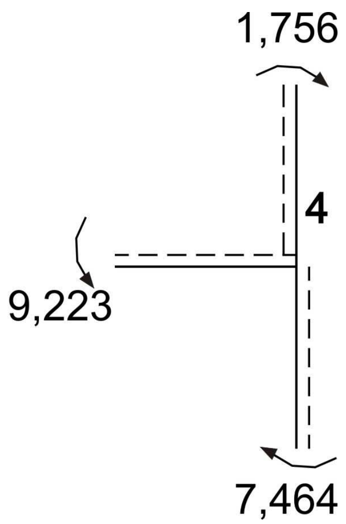
$$M_{31} = 8i_0\varphi_3 - 2i_0\Delta = 8.0,9777 - 2.0,0824 = 7,6568 \approx 7,657kN.m$$

$$M_{34} = 16i_0\varphi_3 + 8i_0\varphi_4 - 16 = 16.0,9777 + 8.(-0,9124) - 16 = -7,656kN.m$$



$$M_{56} = 16i_0\varphi_5 - 16 = 16.0,8850 - 16 = -1,840\text{kN.m}$$

$$M_{54} = 4i_0\varphi_5 + 2i_0\varphi_4 + 1,5i_0\Delta = 4.0,8850 + 2.(-0,9124) + 1,5.0,0824 = 1,8388 \approx 1,839\text{kN.m}$$

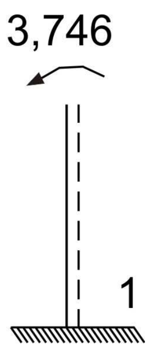


$$M_{42} = 8i_0\varphi_4 - 2i_0\Delta = 8.(-0,9124) - 2.0,0824 = -7,464\text{kN.m}$$

$$M_{43} = 16i_0\varphi_4 + 8i_0\varphi_3 + 16 = 16.(-0,9124) + 8.0,9777 + 16 = 9,2232 \approx 9,223\text{kN.m}$$

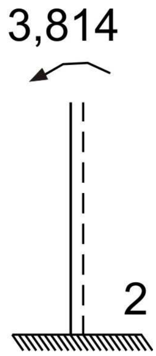
$$M_{45} = 4i_0\varphi_4 + 2i_0\varphi_5 + 1,5i_0\Delta = 4.(-0,9124) + 2.0,8850 + 1,5.0,0824 = -1,756\text{kN.m}$$

$$\sum M_4 = -7,464 + 9,223 - 1,756 = 0,003 \approx 0$$



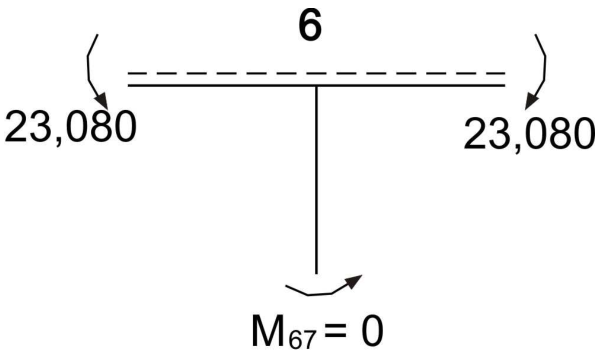
$$M_{13} = 2i_{13}(2\varphi_1 + \varphi_3 - 3\psi_{13}) + M'_{13} = 2.2i_0\left(0 + \varphi_3 - 3.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = 4i_0\varphi_3 - 2i_0\Delta$$

$$M_{13} = 4.0,9777 - 2.0,0824 = 3,746\text{kN.m}$$



$$M_{24} = 2i_{24}(2\varphi_2 + \varphi_4 - 3\psi_{24}) + M'_{24} = 2.2i_0\left(0 + \varphi_4 - 3.\frac{\Delta}{6}\right) + 0 = 4i_0\varphi_4 - 2i_0\Delta$$

$$M_{24} = 4.(-0,9124) - 2.0,0824 = -3,8144 \approx -3,814 kN.m$$



$$M_{65} = 2i_{65}(2\varphi_6 + \varphi_5 - 3\psi_{65}) + M'_{65} = 2.4i_0(0 + \varphi_5 - 0) + \frac{3.8^2}{12} = 8i_0\varphi_5 + 16$$

$$M_{65} = 8.0,8850 + 16 = 23,080 kN.m$$

$$M_{68} = 2i_{68}(2\varphi_6 + \varphi_8 - 3\psi_{68}) + M'_{68} = 2.4i_0(0 - \varphi_5 - 0) - \frac{3.8^2}{12} = -8i_0\varphi_5 - 16$$

$$M_{68} = -8.0,8850 - 16 = -23,080 kN.m$$

$$M_{67} = 2i_{67}(2\varphi_6 + \varphi_7 - 3\psi_{67}) + M'_{67} = 0$$

De acuerdo a los resultados obtenidos y teniendo en cuenta que debe existir equilibrio en los nudos, diagramamos los momentos en los nudos, uniendo dichos valores, tal como se muestra en la figura 6.21.

DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

Para graficar el diagrama final de momento flector M_F, hace falta considerar la acción de las cargas externas. Con este fin, será necesario analizar cada barra, donde hay cargas, como si se tratase de una viga simplemente apoyada (figura 6.22).

El diagrama final de momento flector M_F (figura 6.23), viene a estar dado por la suma del diagrama de momentos en los nudos (figura 6.21) y el diagrama de la viga sola simplemente apoyada M^V (figura 6.22).

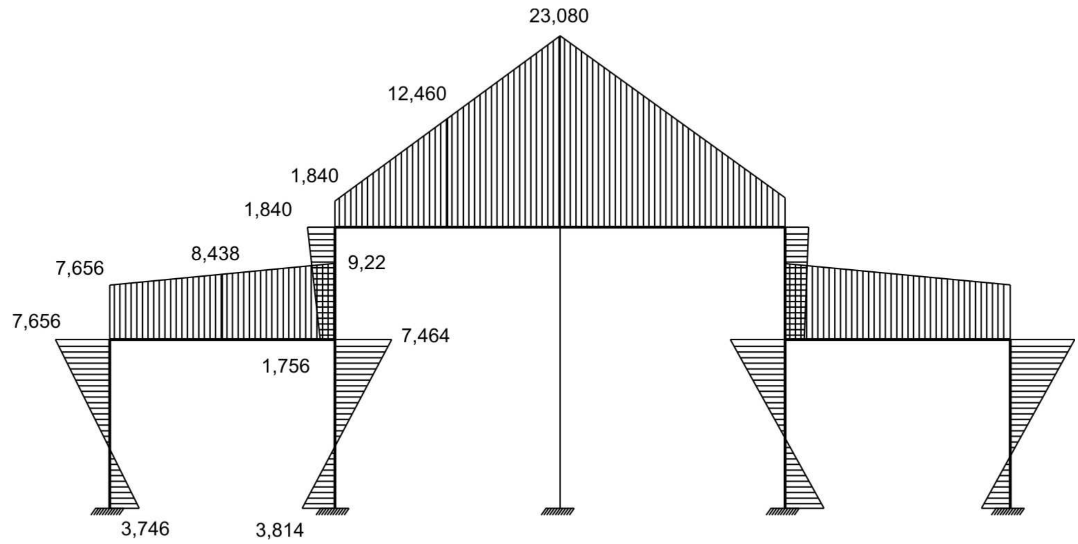


Fig. 6.21 Diagrama de momentos en los nudos

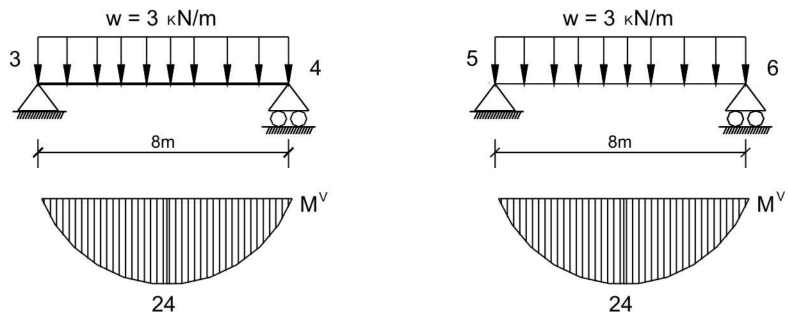


Fig. 6.22 Diagrama M^V

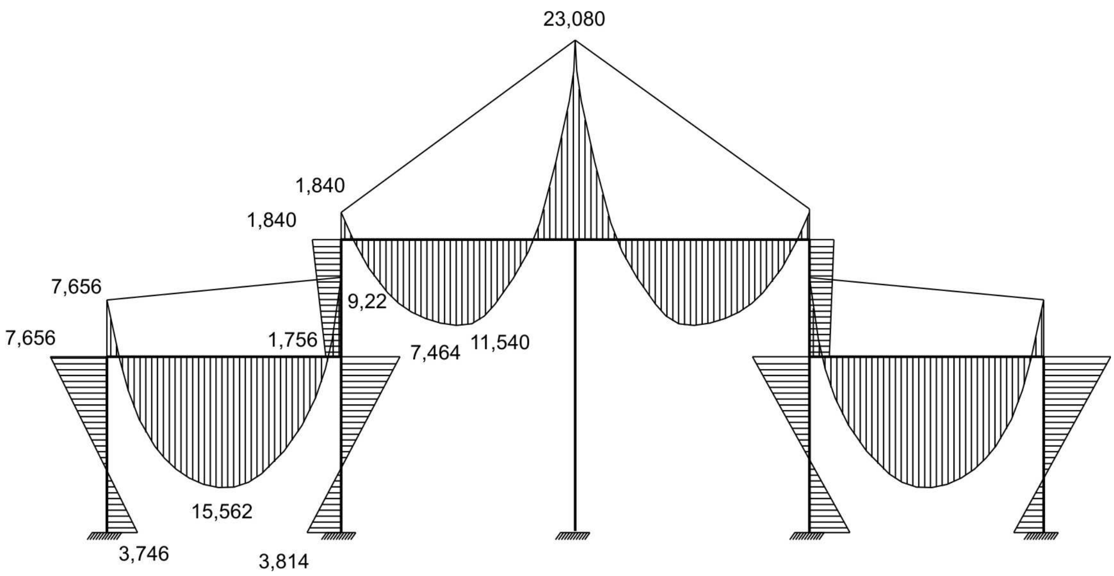


Fig. 6.23 Diagrama M_F

COMPROBACION CINEMATICA

Para efectuar la comprobación cinemática, previamente elegimos un sistema principal por el método de las fuerzas (figura 6.24). En este dibujo se muestran las rigideces en flexión de cada barra: $EI_{ab} = i_{ab}L_{ab}$. Graficamos el diagrama de suma de momentos $\overline{M}_S$, debido a la acción conjunta de las incógnitas $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$ (figura 6.25). También se puede elegir otro diagrama $\overline{M}_S$ debido a otra combinación de las incógnitas, con la condición que existan diagramas en todas las barras y que el diagrama final no sea antisimétrico.

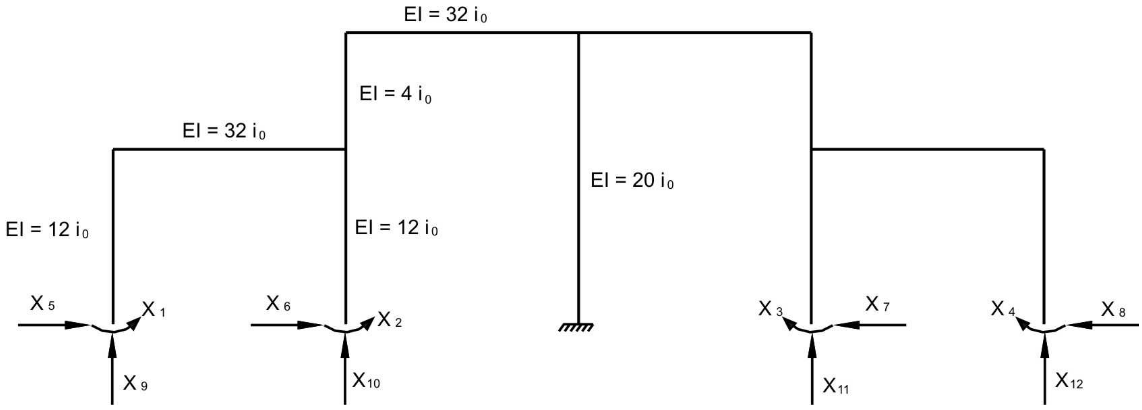


Fig. 6.24

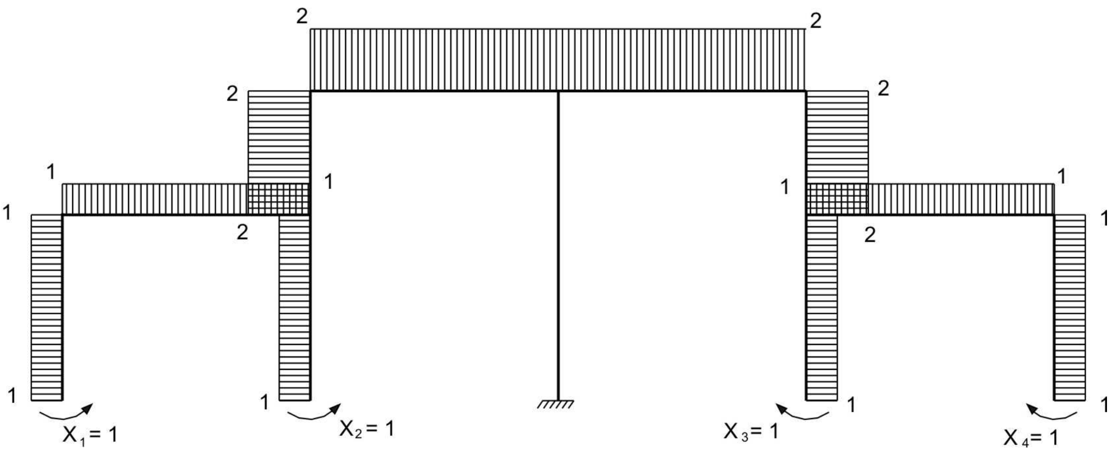


Fig. 6.25 Diagrama $\overline{M}_S$

$$\Delta_{SF} = \sum\int \frac{\overline{M}_S M_F}{EI} dx = 2.\left\{\frac{1}{12i_0}.1.6.1,955 + \frac{8}{6.32i_0}(7,656.1 - 4.15,562.1 + 9,22.1) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{12i_0}.1.6.1,825 + \frac{1}{4i_0}.2.4.1,798 + \frac{8}{6.32i_0}(2.1,840 - 4.2.11,540 + 2.23,080)\right\}$$

$$\Delta_{SF} = 2.(0,9775 - 1,8905 - 0,9125 + 3,5960 - 1,7700)\frac{1}{i_0} = 2.(4,5735 - 4,5730)\frac{1}{i_0} = 2.0,0005\frac{1}{i_0}$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,0005}{4,5735}.100\% = 0,011\%$$

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA CORTANTE

Las fuerzas cortantes en las barras del pórtico, lo determinaremos en función de la dependencia diferencial del diagrama M_F:

$$V_{13} = V_{31} = \frac{-7,656 - 3,746}{6} = -1,900\text{kN}$$

$$V_{42} = \frac{7,464 + 3,814}{6} = 1,880\text{kN}$$

$$V_{54} = V_{45} = \frac{-1,840 + 1,756}{4} = -0,021\text{kN}$$

$$V_{34} = \frac{-9,220 + 7,656}{8} + \frac{3.8}{2} = 11,805\text{kN}$$

$$V_{43} = \frac{-9,220 + 7,656}{8} - \frac{3.8}{2} = -12,196\text{kN}$$

$$V_{56} = \frac{-23,080 + 1,840}{8} + \frac{3.8}{2} = 9,345\text{kN}$$

$$V_{65} = \frac{-23,080 + 1,840}{8} - \frac{3.8}{2} = -14,655\text{kN}$$

El diagrama V_F se muestra en la figura 6.26.

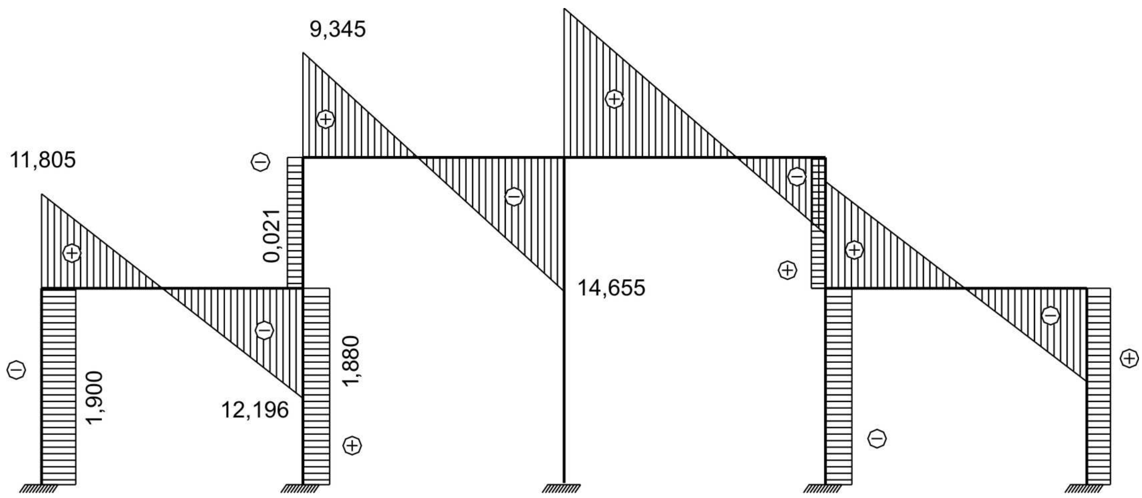


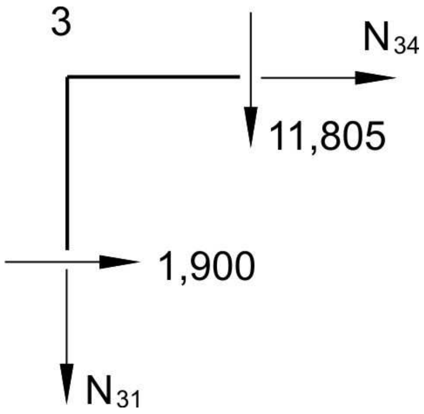
Fig. 6.26 Diagrama V_F

Podemos observar, que cuando el pórtico es simétrico y está sometido a cargas simétricas, el diagrama M_F es simétrico, en cambio, el diagrama V_F es antisimétrico.

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA AXIAL

El diagrama final de fuerza axial, lo realizamos en base al equilibrio de los nudos. Para ello, en forma consecutiva se analizan los nudos, sometidos a las fuerzas cortantes del diagrama V_F, considerando su signo (la fuerza cortante es positiva, si gira al nudo en sentido horario) y también sometidas a las fuerzas axiales calculadas previamente. Para ello, orientamos las fuerzas axiales desconocidas en sentido positivo, esto es que salen del nudo. Después de ello, efectuamos las condiciones de equilibrio $\sum F_X = 0$ y $\sum F_Y = 0$.

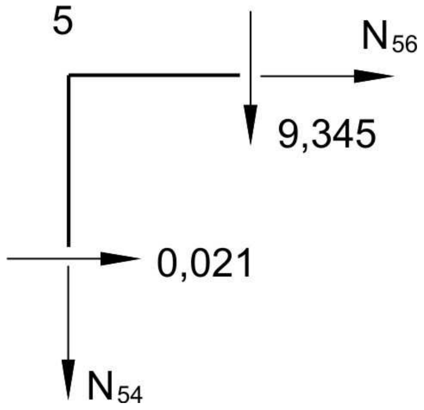
NUDO 3



$\sum F_X = 0$, $N_{34} = -1{,}900\text{kN}$

$\sum F_Y = 0$, $N_{31} = -11{,}805\text{kN}$

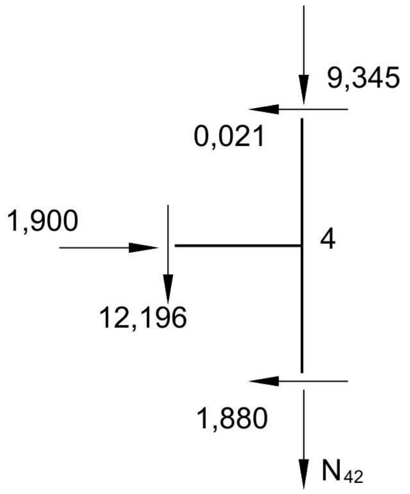
NUDO 5



$\sum F_X = 0$, $N_{56} = -0{,}021\text{kN}$

$\sum F_Y = 0$, $N_{54} = -9{,}345\text{kN}$

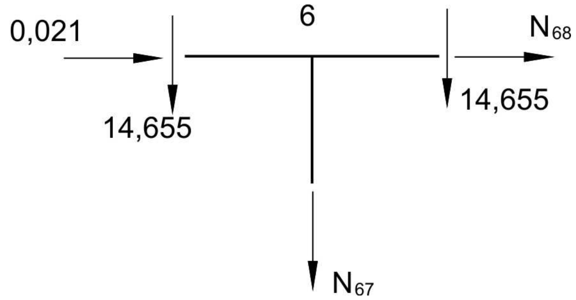
NUDO 4



$$\sum F_X = 0, \qquad -0{,}021 + 1{,}900 - 1{,}880 = -0{,}001 \approx 0$$

$$\sum F_Y = 0, \qquad N_{42} = -21{,}541 kN$$

NUDO 6



$$\sum F_X = 0, \qquad N_{68} = -0{,}021 kN$$

$$\sum F_Y = 0, \qquad N_{67} = -29{,}310 kN$$

El diagrama N_F se muestra en la figura 6.27.

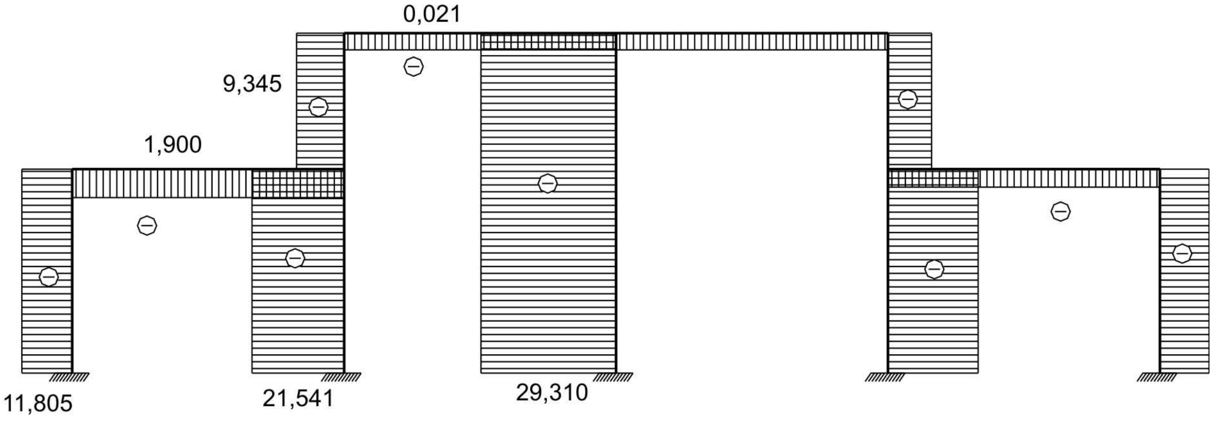


Fig. 6.27 Diagrama N_F

COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL

Para efectuar la comprobación estática de equilibrio total, eliminamos los apoyos del pórtico y los reemplazamos por sus reacciones (figura 6.28), obtenidas de las figuras 6.23, 6.26 y 6.27. Después comprobamos el equilibrio de todo el pórtico, a través de las ecuaciones simples de equilibrio estático.

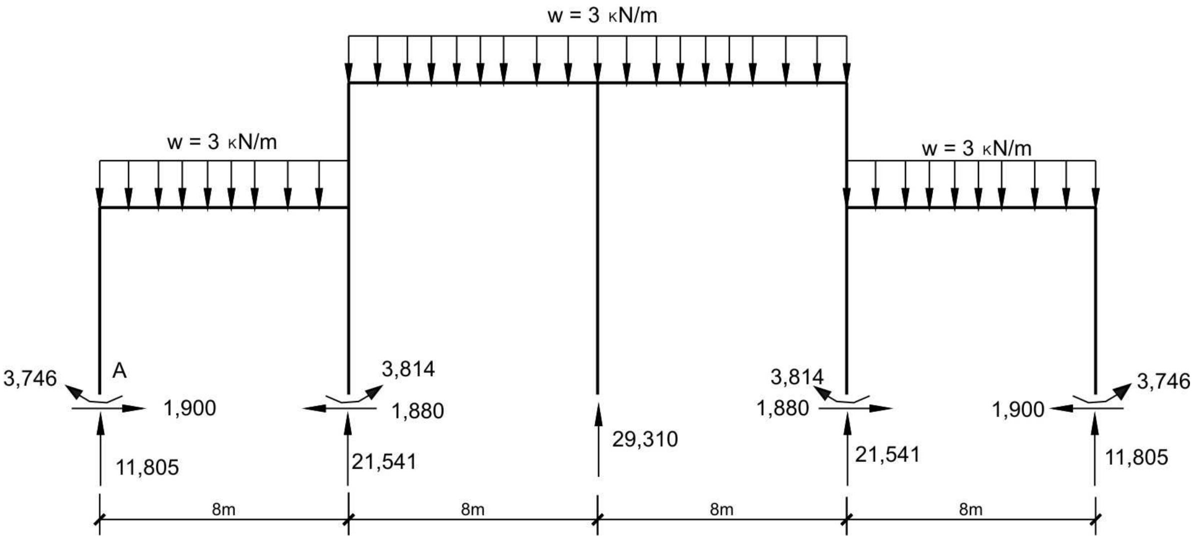


Fig. 6.28

$$\sum F_X = 1{,}900 - 1{,}880 + 1{,}880 - 1{,}900 = 0$$

$$\sum F_Y = 2.11{,}805 + 2.21{,}541 + 29{,}310 - 4.3.8 = 96{,}002 - 96{,}000 = 0{,}002 \approx 0$$

$$\sum M_A = 3.8.4 + 3.16.16 + 3.8.28 + 3{,}746 - 3{,}814 + 3{,}814 - 3{,}746 - 21{,}541.8 - 29{,}310.16 -$$

$$- 21{,}541.24 - 11{,}805.32 = 1543{,}560 - 1543{,}592 = -0{,}032 \approx 0$$

6.9 CALCULO DE PORTICO PLANO POR LA FORMA CANONICA

Calcular el pórtico sometido a las cargas externas mostradas en la figura 6.29.

GRADO DE INDETERMINACION

El pórtico dado tiene dos ángulos de giro desconocidos: ángulo de giro en el nudo 1 y ángulo de giro en el nudo 2. Para determinar el número de desplazamientos lineales desconocidos de los nudos, elaboramos el esquema del pórtico con rótulas (figura 6.30).

Para cambiar su estado a un esquema geométricamente invariable, será suficiente adicionar una barra tipo apoyo en la viga 2-5 que impida el desplazamiento horizontal, pudiendo ubicarse la barra en el nudo 2 o en el nudo 5.

De esta manera, el pórtico dado tiene un desplazamiento lineal desconocido y su grado de indeterminación del sistema es:

$$n = n_n + n_d = 2 + 1 = 3$$

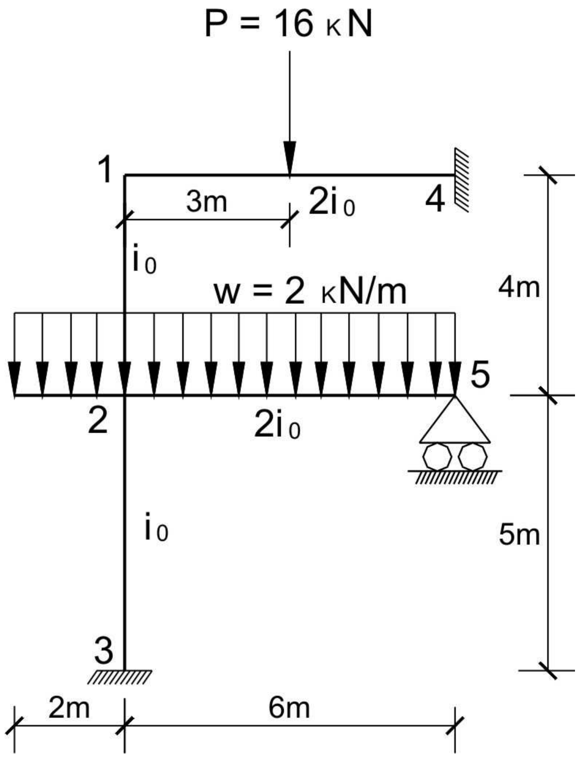


Fig. 6.29

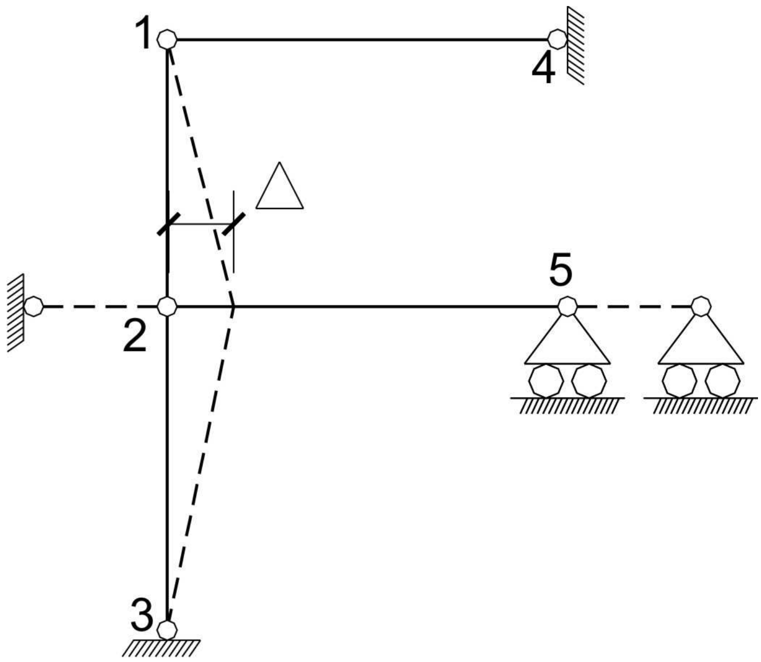


Fig. 6.30

SISTEMA PRINCIPAL

Elaboramos el sistema principal del método de desplazamientos, incorporando los empotramientos elásticos en los nudos 1 y 2, así como agregamos la barra adicional tipo apoyo en el nudo 5 (figura 6.31). Consideramos incógnitas a los desplazamientos angulares y lineales de las conexiones adicionales, que son Z_1 y Z_2 los que describen los ángulos de giro desconocidos en los nudos 1 y 2 y Z_3 al desplazamiento lineal desconocido de la viga 2-5.

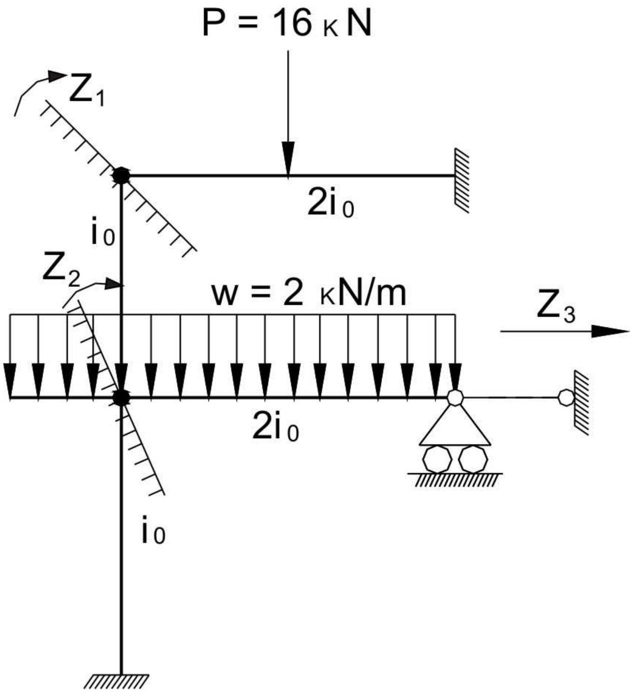


Fig. 6.31 Sistema principal

SISTEMA DE ECUACIONES

El sistema de ecuaciones canónicas del método de desplazamientos es:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0$$

Donde:

r_{jk} - reacción en la conexión adicional j, debido al desplazamiento unitario en la conexión adicional k $(Z_k = 1)$

R_{jP} - reacción en la conexión adicional j, debido a la acción de la carga externa.

Para determinar los coeficientes del sistema de ecuaciones (a), graficamos los diagramas de momento flector unitarios y de carga externa en el sistema principal.

Para graficar el diagrama $\overline{M}_1$, debemos de colocar el valor de $Z_1 = 1$. Esto implica, que la conexión adicional en el nudo 1 del sistema principal, debe tener un ángulo unitario en el sentido horario. Como consecuencia, las barras 1-4 y 1-2, que convergen con el nudo 1, se flexionan y surgirán momentos flectores. Los valores de los momentos flectores en los extremos de estas barras y sus correspondientes diagramas de momento flector se grafican de acuerdo a la tabla 6.1. El diagrama $\overline{M}_1$ se muestra en la figura 6.32.

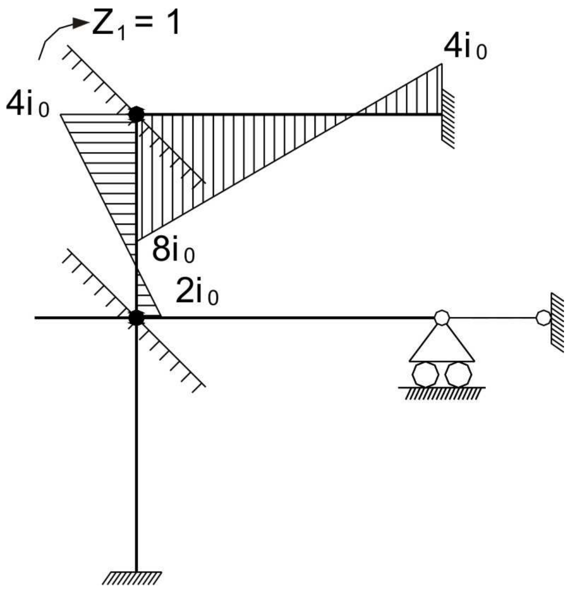


Fig. 6.32 Diagrama $\overline{M}_1$

Para graficar el diagrama $\overline{M}_2$, hacemos que gire unitariamente el nudo 2, es decir $Z_2 = 1$. Como consecuencia, las barras 2-1, 2-5 y 2-3, que convergen con el nudo 2, se flexionarán y surgirán momentos flectores. Los diagramas de momento flector en dichas barras, dependen de las condiciones de apoyos en los extremos. Producto del giro, el voladizo que converge con el nudo 2 también gira, pero no flexiona, por ello, no posee momento flector. El diagrama total $\overline{M}_2$ se muestra en la figura 6.33.

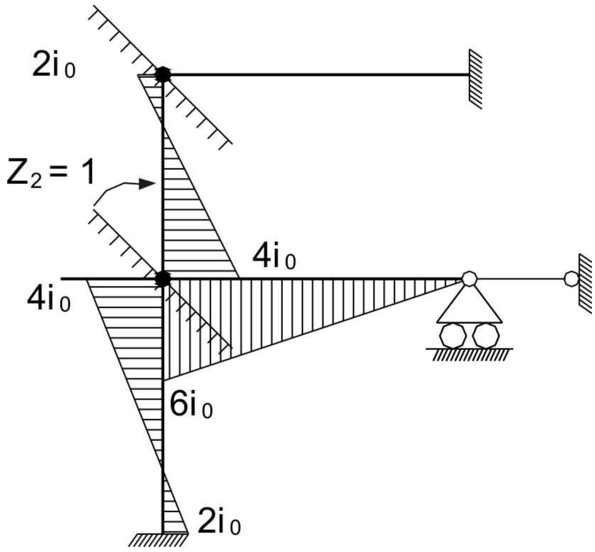


Fig. 6.33 Diagrama $\overline{M}_2$

Para graficar el diagrama $\overline{M}_3$, hacemos que el nudo 5 se desplace unitariamente en el sentido horizontal, es decir $Z_3 = 1$. Como consecuencia, los nudos 5 y 2 se desplazan horizontalmente en la dirección $Z_3 = 1$ y como el nudo 2 no gira (por cuanto tiene un empotramiento elástico adicional que

le impide), entonces las barras 2-1 y 2-3 se flexionan, y, en consecuencia, aparecen momentos flectores. Los diagramas de momentos se toman de la tabla 6.1 y el diagrama final $\overline{M}_3$ se muestra en la figura 6.34.

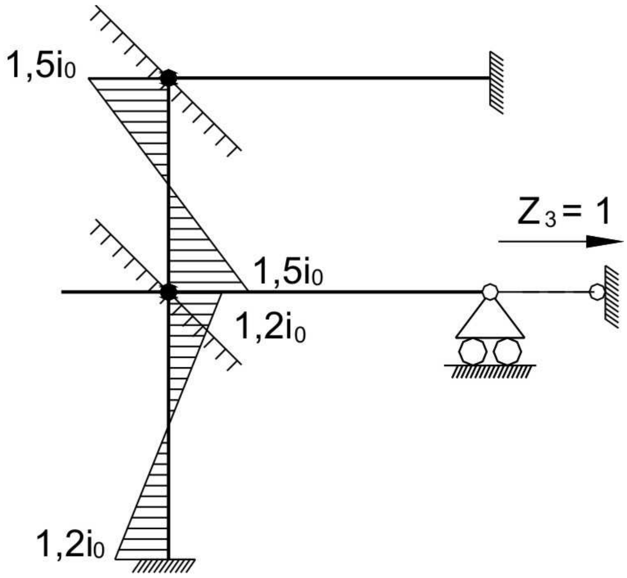


Fig. 6.34 Diagrama $\overline{M}_3$

El diagrama M_P depende de las cargas externas y surgen únicamente en las barras cargadas. Los diagramas se determinan a través de la tabla 6.1, dependientes del tipo de carga externa y de las condiciones de los apoyos extremos. En cuanto al voladizo, que está cargado por $w = 2kN/m$, se grafica comúnmente y el diagrama final M_P se muestra en la figura 6.35.

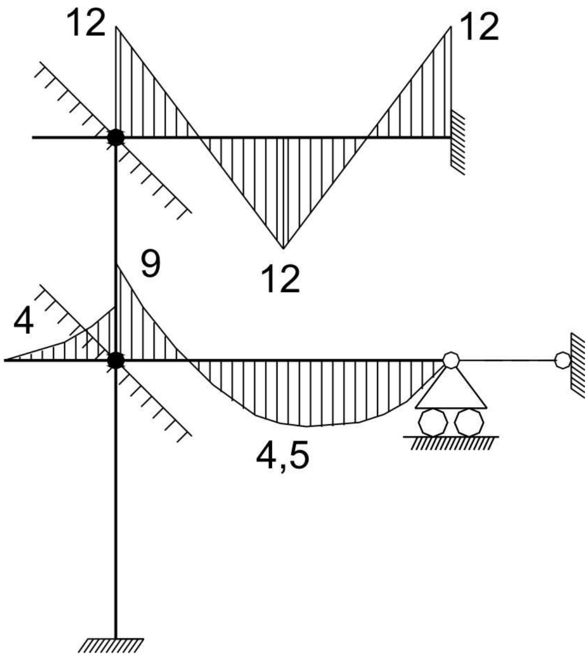
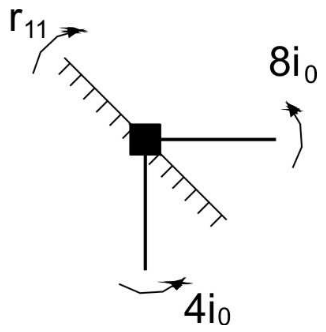


Fig. 6.35 Diagrama M_P

Ahora determinamos los coeficientes del sistema de ecuaciones (a), analizando el equilibrio de las conexiones adicionales en forma consecutiva en todos los casos de cargas unitarias y de carga externa.

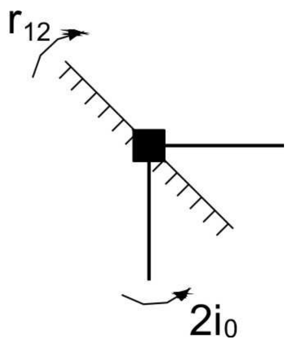
CONEXIÓN ADICIONAL EN EL NUDO 1:

ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



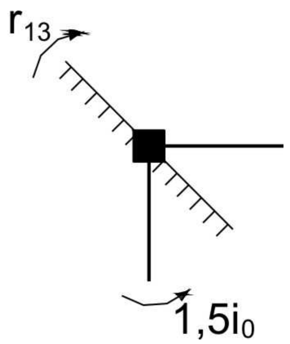
$$\sum M = 0\,, \qquad r_{11} = 12i_0$$

ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



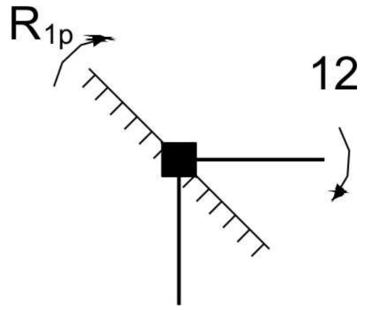
$$\sum M = 0\,, \qquad r_{12} = 2i_0$$

ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



$$\sum M = 0\,, \qquad r_{13} = 1{,}5i_0$$

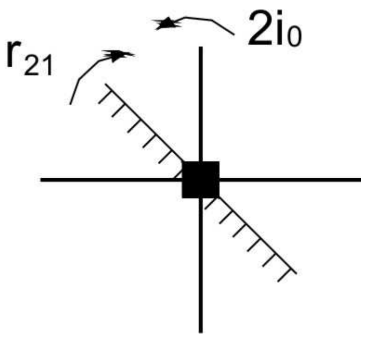
ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)



$\sum M = 0$, $R_{1P} = -12$

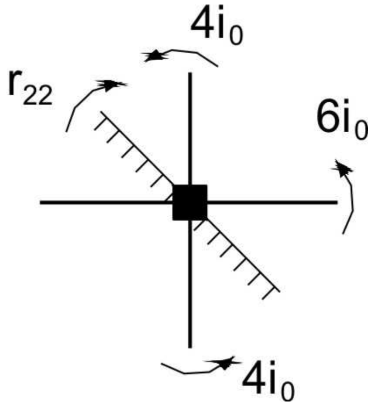
CONEXIÓN ADICIONAL EN EL NUDO 2:

ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



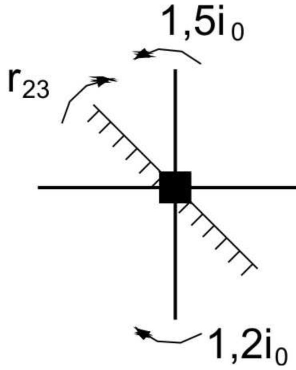
$\sum M = 0$, $r_{21} = 2i_0$

ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



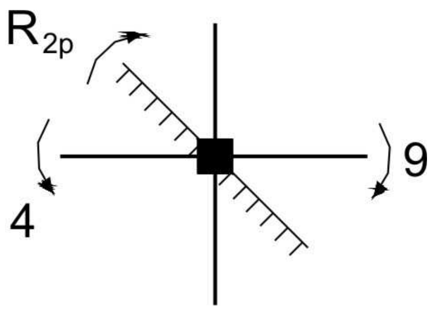
$\sum M = 0$, $r_{22} = 14i_0$

ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



$$\sum M = 0 , \qquad r_{23} = 0{,}3i_0$$

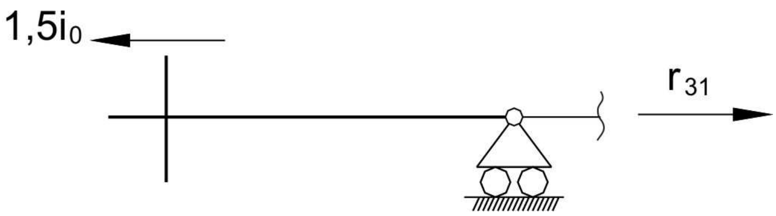
ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)



$$\sum M = 0 , \qquad R_{2P} = -5$$

Para determinar la reacción en la conexión adicional tipo apoyo, haremos un corte en la viga 2-5 y analizamos su equilibrio:

ESTADO 1

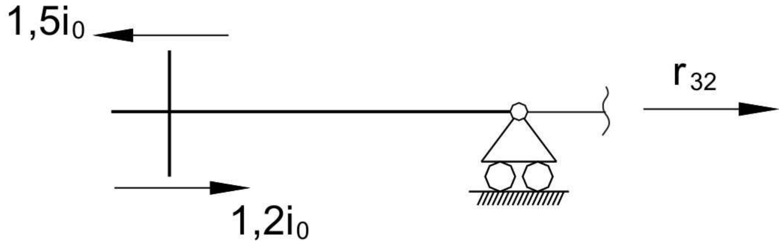


Las fuerzas cortantes en las barras cortadas se determinan, de acuerdo al diagrama de momento flector. Por ejemplo, para el estado 1, en la barra 1-2 se tiene $V_{12} = -\dfrac{4i_0 + 2i_0}{4} = -1{,}5i_0$ y en la barra 2-3 $V_{23} = 0$.

De esta manera:

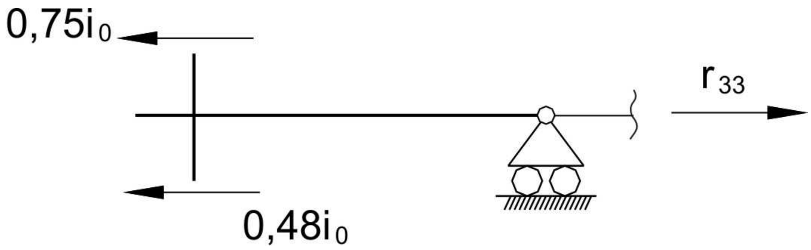
$$\sum F_X = 0 , \qquad r_{31} = 1{,}5i_0$$

ESTADO 2



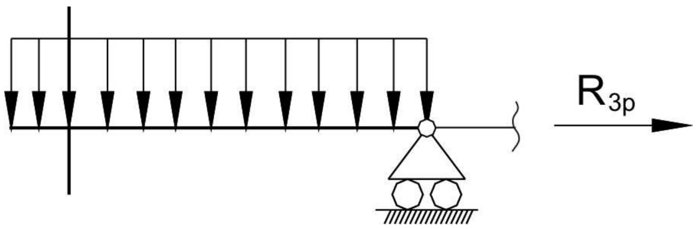
$$\sum F_X = 0, \qquad r_{32} = 0{,}3i_0$$

ESTADO 3



$$\sum F_X = 0, \qquad r_{33} = 1{,}23i_0$$

ESTADO DE CARGA



$$\sum F_X = 0, \qquad R_{3P} = 0$$

Reemplazamos los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones (a) y queda así:

$$12i_0Z_1 + 2i_0Z_2 + 1{,}5i_0Z_3 - 12 = 0$$

$$2i_0Z_1 + 14i_0Z_2 + 0{,}3i_0Z_3 - 5 = 0$$

$$1{,}5i_0Z_1 + 0{,}3i_0Z_2 + 1{,}23i_0Z_3 = 0$$

Como se puede apreciar, los coeficientes del sistema son simétricos respecto a la diagonal principal y los coeficientes de la diagonal principal son positivos.

Resolvemos dicho sistema de ecuaciones y obtenemos los siguientes resultados:

$$i_0Z_1 = 1{,}1437$$

$$i_0Z_2 = 0{,}2248$$

$$i_0Z_3 = -1{,}4496$$

Comprobamos la veracidad de los resultados, reemplazando dichos valores en la suma del sistema de ecuaciones:

$$15{,}5i_0Z_1 + 16{,}3i_0Z_2 + 3{,}03i_0Z_3 - 17 = 0$$

$$15{,}5.1{,}1437 + 16{,}3.0{,}2248 - 3{,}03.1{,}4496 - 17 = 21{,}3916 - 21{,}3923 = -0{,}0007 \approx 0$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0{,}0007}{21{,}3916}.100\% = 0{,}003\%$$

DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

El diagrama final de momento flector M_F lo obtenemos como la suma de diagramas, de acuerdo a la ecuación (b):

$$M_F = \overline{M}_1Z_1 + \overline{M}_2Z_2 + \overline{M}_3Z_3 + M_P \qquad \text{(b)}$$

Los diagramas parciales $\overline{M}_1Z_1$, $\overline{M}_2Z_2$, $\overline{M}_3Z_3$ se muestran en las figuras 6.36, 6.37, 6.38 y el diagrama final de momento flector en la figura 6.39.

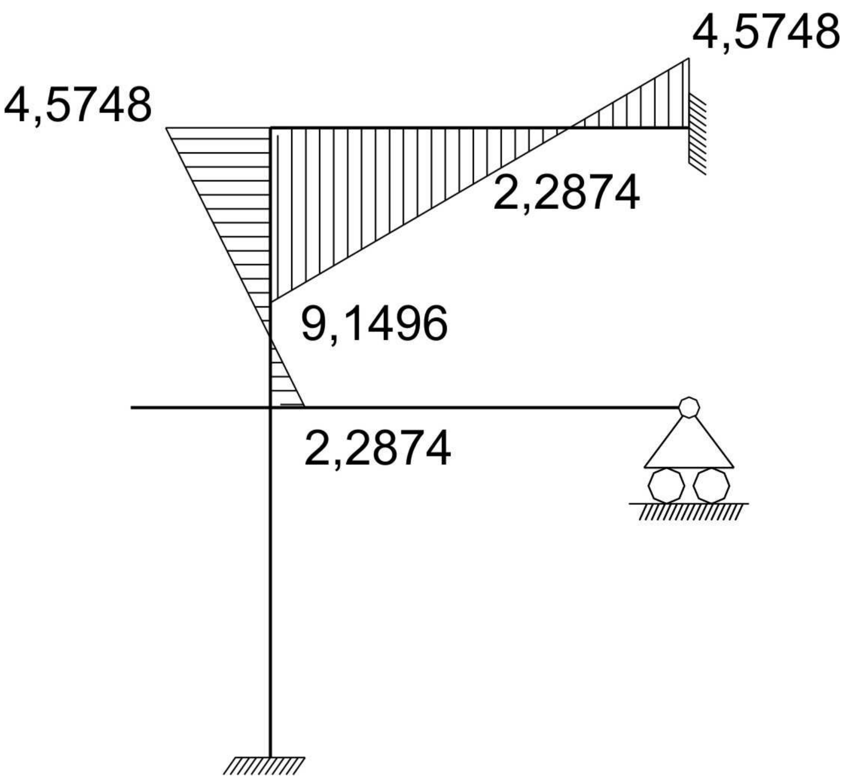


Fig. 6.36 Diagrama $\overline{M}_1Z_1$

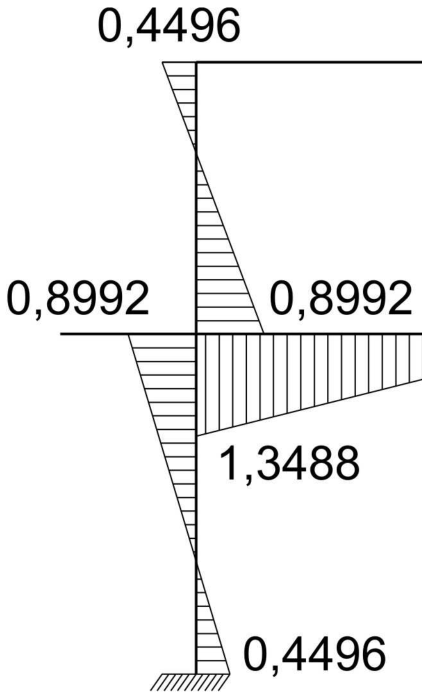


Fig. 6.37 Diagrama $\overline{M}_2 Z_2$

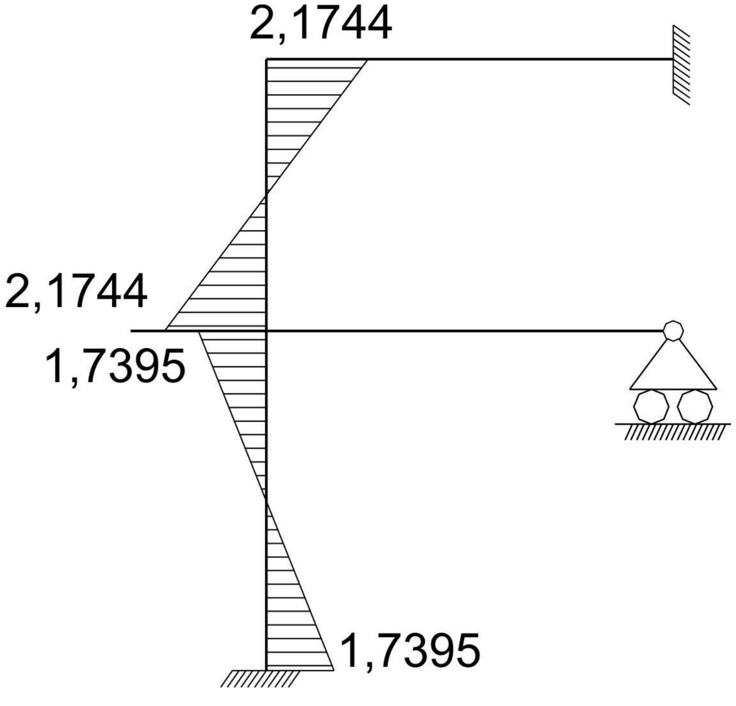


Fig. 6.38 Diagrama $\overline{M}_3 Z_3$

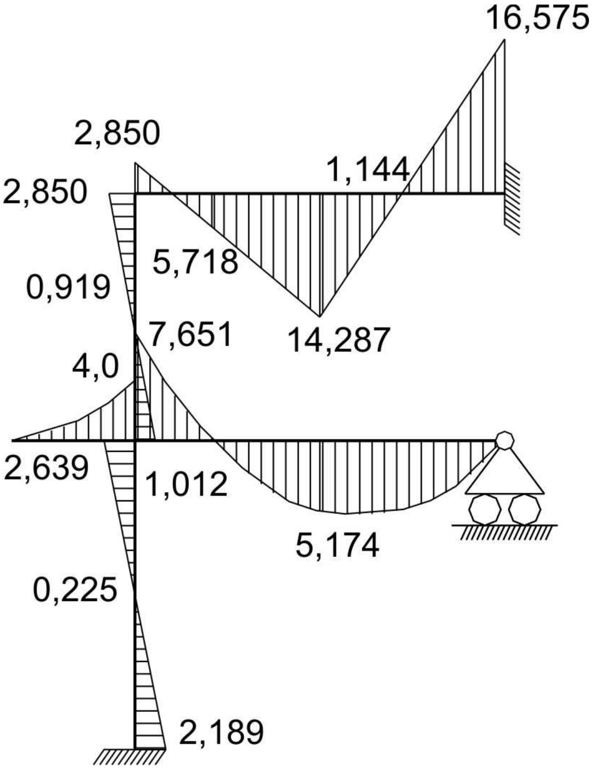


Fig. 6.39 Diagrama M_F

COMPROBACION CINEMATICA

Efectuamos la comprobación cinemática o de deformación del diagrama M_F. Para ello, en el pórtico dado, elegimos el sistema principal del método de las fuerzas (figura 6.40) y graficamos, en ella, la suma de los diagramas unitarios $\overline{M}_S$ (figura 6.41), debido a la acción de dos incógnitas $X_1 = X_4 = 1$.

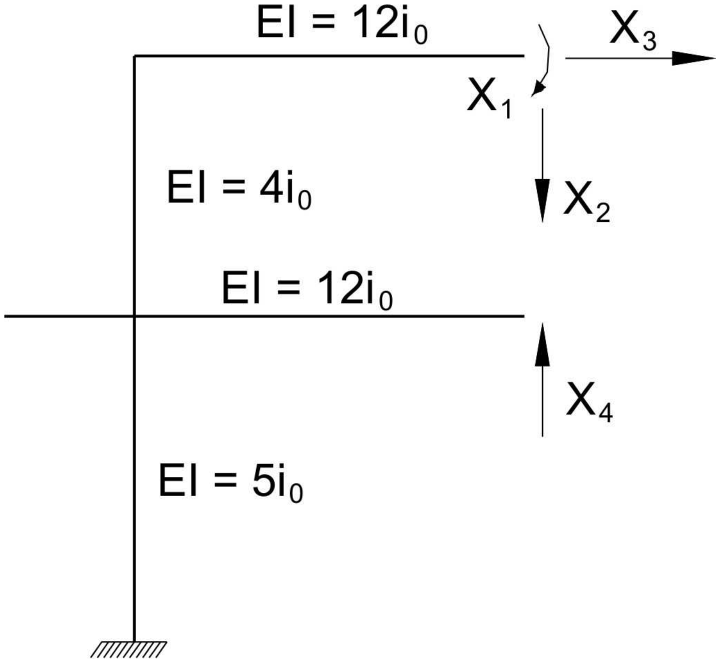


Fig. 6.40

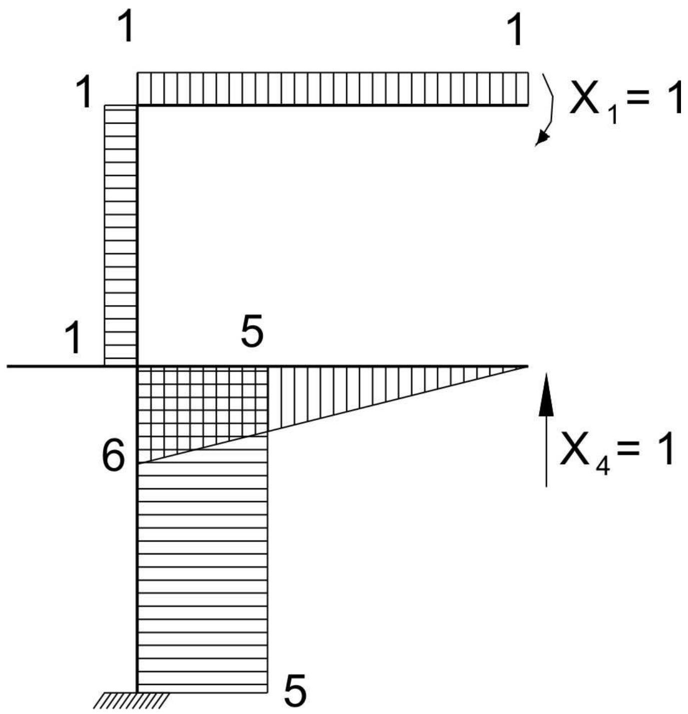


Fig. 6.41 Diagrama $\overline{M}_S$

Se puede efectuar el diagrama debido a otra combinación, siempre y cuando existan diagramas en todas las barras.

Calculamos las rigideces en flexión de las barras, a través de la relación $EI_{ab} = i_{ab}L_{ab}$, cuyos resultados se muestran en la figura 6.40.

Determinamos el desplazamiento y el proceso de integración lo efectuamos por el método de Vereschaguin o por la fórmula de Simpson – Kornoujov:

$$\Delta_{SF} = \sum\int \frac{\overline{M}_S M_F}{EI} dx = -\frac{1}{5i_0}.5.5.0,225 + \frac{6}{6.12i_0}(-7,651.6 + 4.3.5,174 + 0) + \frac{1}{4i_0}.4.1.0,919 -$$

$$-\frac{1}{12i_0}.1.3.5,718 + \frac{1}{12i_0}.1.3.1,144 = -\frac{1,125}{i_0} + \frac{1,3485}{i_0} + \frac{0,919}{i_0} - \frac{1,4295}{i_0} + \frac{0,286}{i_0}$$

$$\Delta_{SF} = \frac{2,5535}{i_0} - \frac{2,5545}{i_0} = -\frac{0,0010}{i_0}$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,0010}{2,5535}.100\% = 0,039\%$$

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA CORTANTE

Determinamos las fuerzas cortantes utilizando la dependencia diferencial entre V_F y M_F:

$$V_{14} = \frac{2,850 + 14,287}{3} = 5,712 kN$$

$$V_{41} = -\frac{14,287 + 16,575}{3} = -10,287 kN$$

$$V_{12} = V_{21} = -\frac{2,850 + 1,012}{4} = -0,966 kN$$

$$V_{23} = V_{32} = -\frac{2,639 + 2,189}{5} = -0,966 kN$$

$$V_{25} = \frac{7,651}{6} + \frac{2.6}{2} = 7,275 kN$$

$$V_{52} = \frac{7,651}{6} - \frac{2.6}{2} = -4,725 kN$$

También graficamos en el voladizo como lo habitual y, de esta manera, el diagrama final de fuerza cortante V_F se muestra en la figura 6.42.

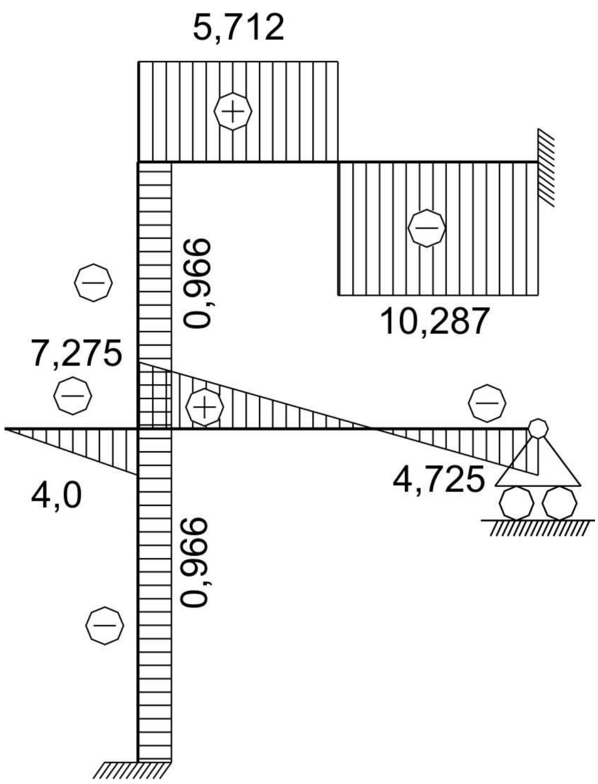


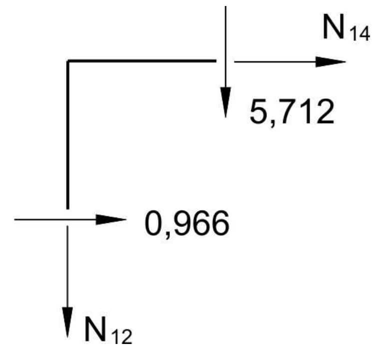
Fig. 6.42 Diagrama V_F

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA AXIAL

Determinamos las fuerzas axiales, analizando el equilibrio de los nudos del pórtico en forma consecutiva e ingresando los valores obtenidos de las fuerzas cortantes y fuerzas axiales obtenidas previamente.

El diagrama final de fuerza axial N_F se muestra en la figura 6.43.

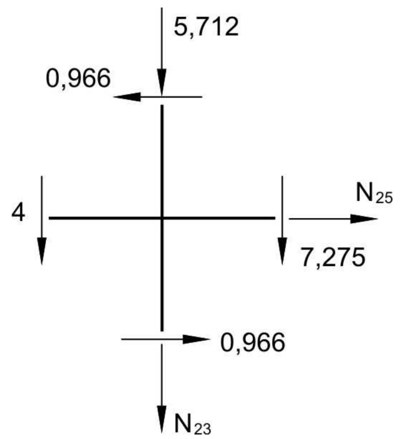
NUDO 1



$$\sum F_X = 0, \qquad N_{14} = -0{,}966\text{kN}$$

$$\sum F_Y = 0, \qquad N_{12} = -5{,}712\text{kN}$$

NUDO 2



$$\sum F_X = 0, \qquad N_{25} = 0$$

$$\sum F_Y = 0, \qquad N_{23} = -16{,}987\text{kN}$$

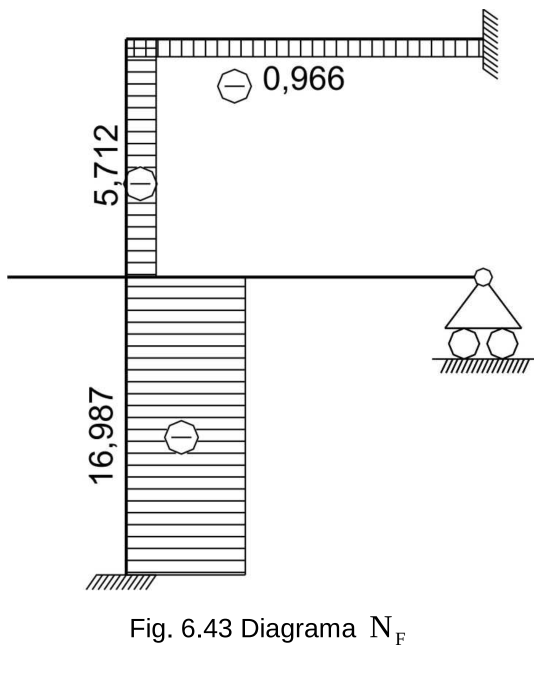


Fig. 6.43 Diagrama N_F

COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL

Eliminamos los apoyos y los reemplazamos por sus reacciones, obtenidas de los diagramas M_F, V_F y N_F, así como las cargas externas, tal como se muestra en la figura 6.44.

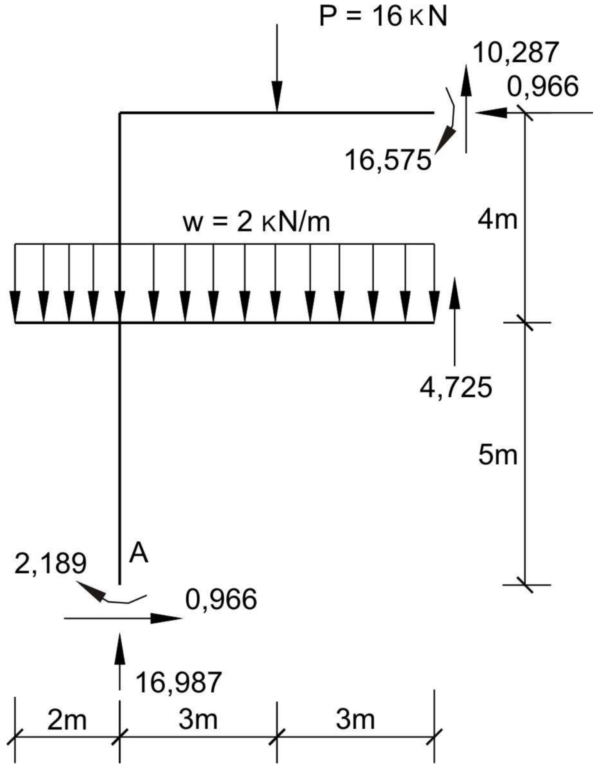


Fig. 6.44

$$\sum F_X = 0{,}966 - 0{,}966 = 0$$

$$\sum F_Y = -16 - 2.8 + 16{,}987 + 4{,}725 + 10{,}287 = -0{,}001 \approx 0$$

$$\sum M_A = 2{,}189 - 2.2.1 + 2.6.3 - 4{,}725.6 + 16.3 + 16{,}575 - 10{,}287.6 - 0{,}966.9 = -0{,}002 \approx 0$$

6.10 CALCULO DE PORTICO SIMETRICO POR LA FORMA CANONICA

Calcular el pórtico simétrico mostrado en la figura 6.45.

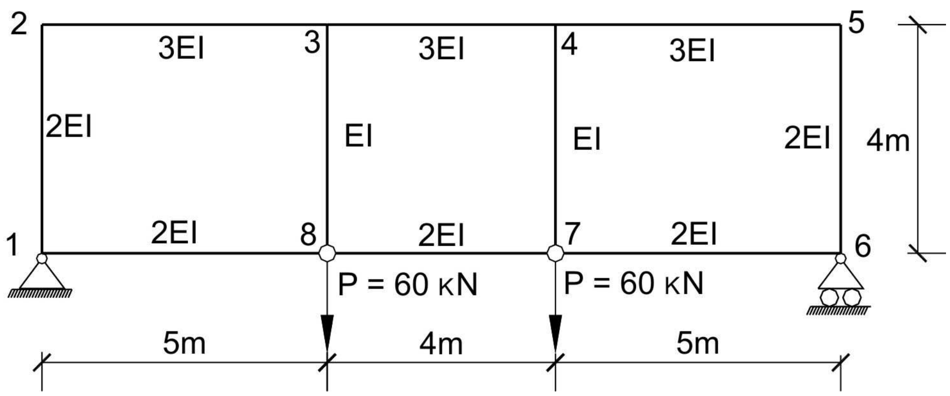


Fig. 6.45

GRADO DE INDETERMINACION

El pórtico indicado tiene 6 nudos rígidos, y, en consecuencia, el número de ángulos de giro desconocidos es seis: φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6. Como el pórtico y las cargas son simétricas, entonces la deformación del pórtico también será simétrica y, en base a ello, se tendrá que $\varphi_6 = -\varphi_1$, $\varphi_5 = -\varphi_2$, $\varphi_4 = -\varphi_3$. El signo menos, indica que los giros son opuestos, por ejemplo, si el nudo 2 gira en sentido horario, entonces su nudo simétrico 5 girará en sentido antihorario.

El esquema de rótulas del pórtico, se genera colocando articulaciones en todos los nudos rígidos, tal como se muestra en la figura 6.46. Este esquema es geométricamente variable. Para que se convierta en geométricamente invariable, será necesario ingresar tres barras adicionales tipo apoyos, que impidan los tres desplazamientos lineales: Δ_1 (desplazamiento horizontal de las barras 2-3, 3-4 y 4-5), Δ_2 y Δ_3 (desplazamientos verticales de las barras 3-8 y 4-7). En consecuencia, el número de desplazamientos lineales desconocidos es $n_d = 3$. Las desviaciones de los elementos del pórtico, correspondientes a cada desplazamiento lineal en forma separada, se muestra en la figura 6.46. Por cuanto la deformación del pórtico dado, debe ser simétrica, se puede decir que $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3$. El probable esquema de desviaciones simétricas del sistema de rótulas se muestra en la figura 6.47.

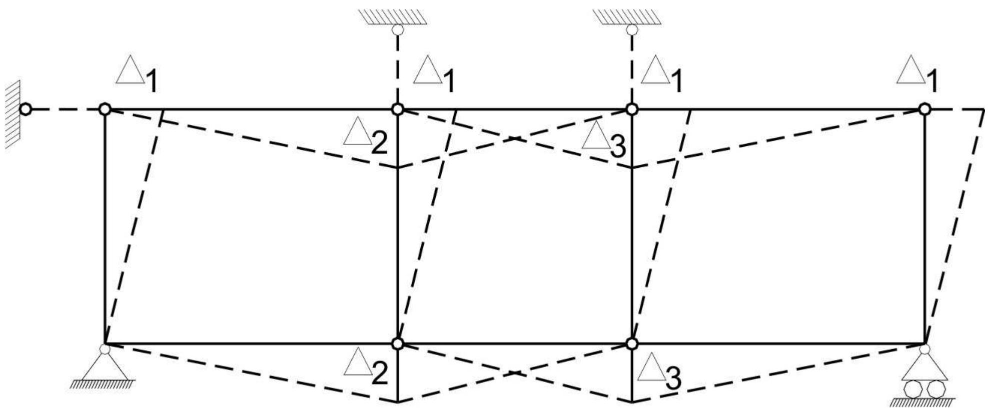


Fig. 6.46

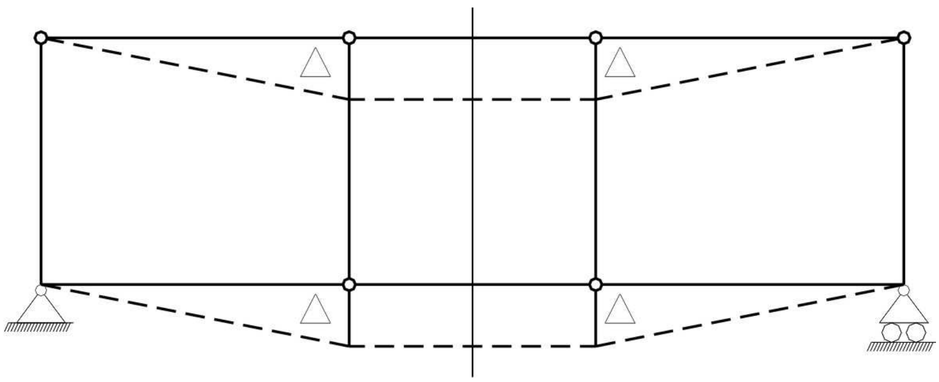


Fig. 6.47

De esta manera, el pórtico dado tiene tres ángulos de giro desconocidos $n_n = 3\ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ y un desplazamiento lineal desconocido $n_d = 1\ (\Delta = \Delta_2 = \Delta_3)$.

En consecuencia, el pórtico dado tiene cuatro incógnitas y es cuatro veces hiperestático.

$$n = n_n + n_d = 4$$

SISTEMA PRINCIPAL

El sistema principal del método de desplazamientos (figura 6.48) se obtiene, incorporando los empotramientos elásticos en todos los nudos rígidos, así como las barras adicionales, las cuales impiden los desplazamientos lineales de los nudos.

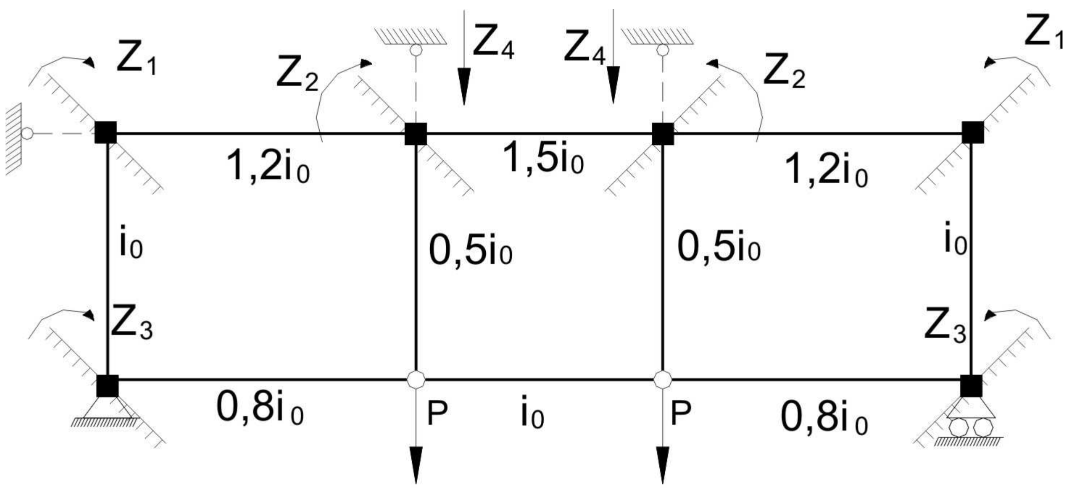


Fig. 6.48

Denotamos a las incógnitas del método de desplazamientos de la siguiente manera:

Z_1 - giro simétrico en los nudos 2 y 5

Z_2 - giro simétrico en los nudos 3 y 4

Z_3 - giro simétrico en los nudos 1 y 6

Z_4 - desplazamiento vertical lineal simétrico en los nudos 3 y 4

Tales incógnitas, se unen en una sola llamada grupal.

SISTEMA DE ECUACIONES

El sistema de ecuaciones canónicas del método de desplazamientos es:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{14}Z_4 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{24}Z_4 + R_{2P} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + R_{3P} = 0 \\ r_{41}Z_1 + r_{42}Z_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + R_{4P} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Donde:

r_{jk} - reacción en la conexión adicional j, debido al desplazamiento unitario de la conexión adicional k.

Por ejemplo, r_{13} es la suma de las reacciones en dos empotramientos elásticos de los nudos 2 y 5, debido al mismo tiempo del giro simétrico unitario de los nudos 1 y 6.

Determinamos las rigideces por metro lineal de los elementos del pórtico:

$$i_{12} = \frac{2EI}{4} = 0{,}5EI = i_0$$

$$i_{23} = \frac{3EI}{5} = 0{,}6EI = 1{,}2i_0$$

$$i_{34} = \frac{3EI}{4} = 0{,}75EI = 1{,}5i_0$$

$$i_{38} = \frac{EI}{4} = 0{,}25EI = 0{,}5i_0$$

$$i_{18} = \frac{2EI}{5} = 0{,}4EI = 0{,}8i_0$$

$$i_{87} = \frac{2EI}{4} = 0{,}5EI = i_0$$

Analizamos en forma consecutiva los casos de desplazamientos unitarios en las direcciones indicadas anteriormente. Los diagramas de momento flector $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, correspondiente a los giros simétricos $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 1$, así como el diagrama $\overline{M}_4$, debido al desplazamiento lineal de los dos nudos $Z_4 = 1$, se muestran en las figuras 6.49 – 6.52. Los valores numéricos de las ordenadas de estos diagramas, se determinan por la tabla 6.1. El diagrama de momento flector M_P (figura 6.53), debido a la carga externa, no existe, ya que la carga está aplicada en los nudos donde existía desplazamiento adicional vertical y esto no ocasiona flexión en las barras del sistema principal.

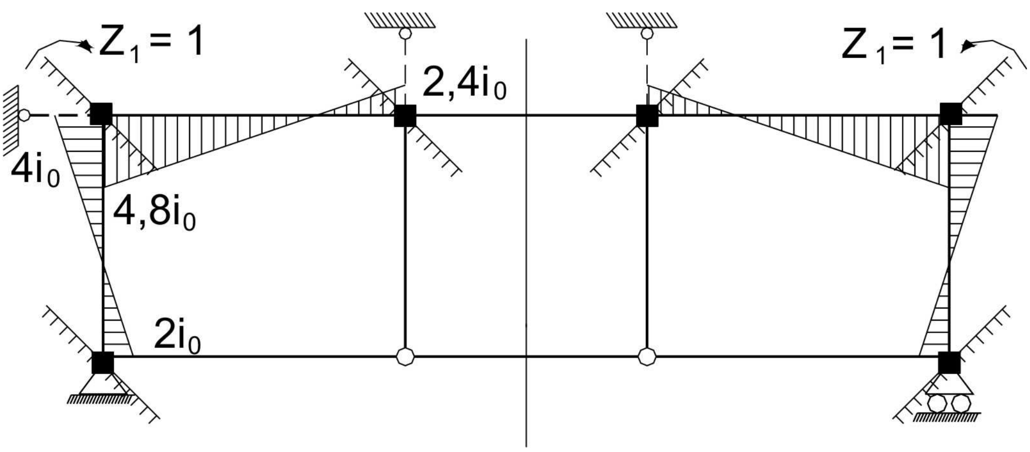


Fig. 6.49 Diagrama $\overline{M}_1$

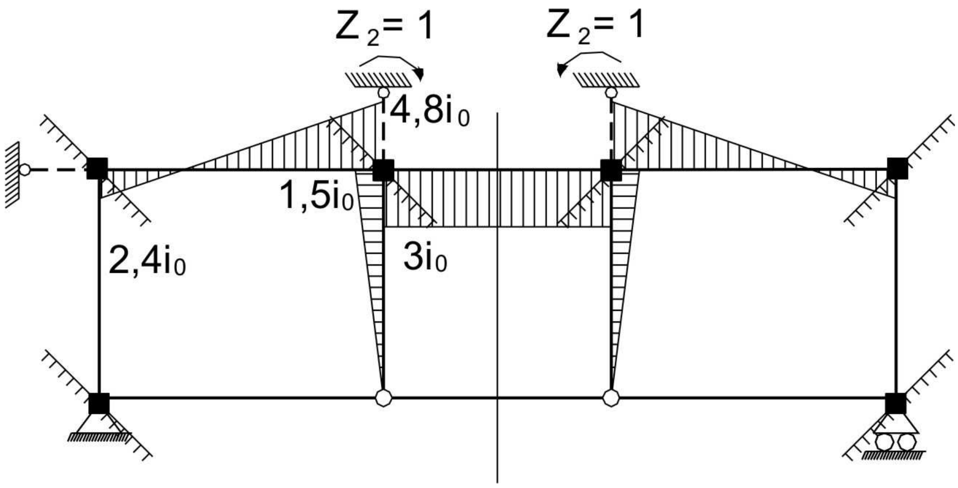


Fig. 6.50 Diagrama $\overline{M}_2$

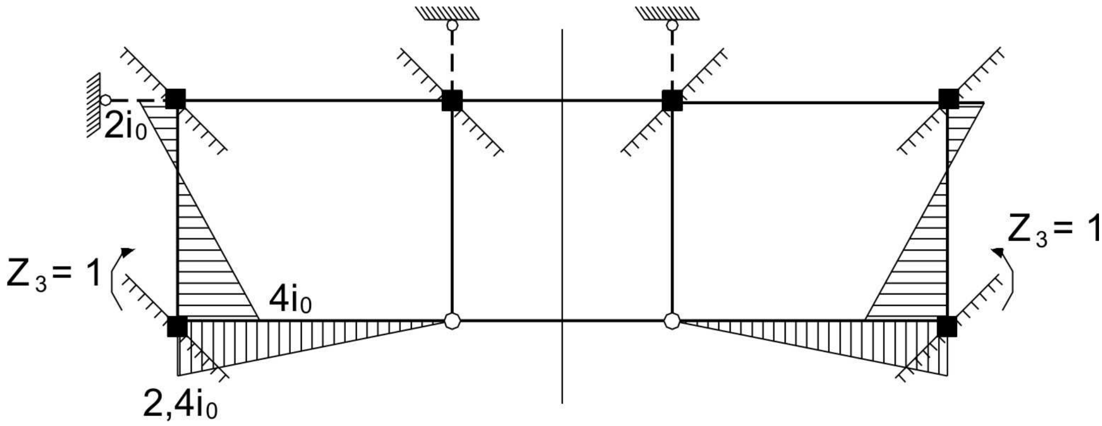


Fig. 6.51 Diagrama $\overline{M}_3$

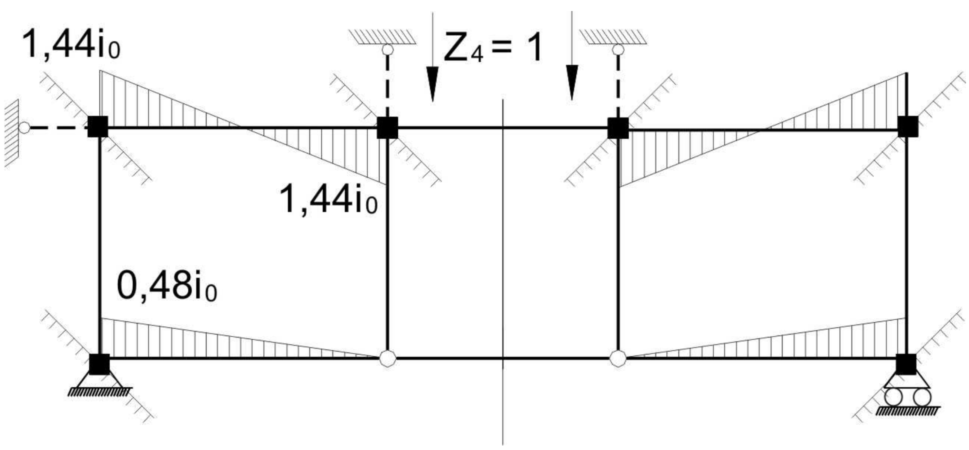


Fig. 6.52 Diagrama $\overline{M}_4$

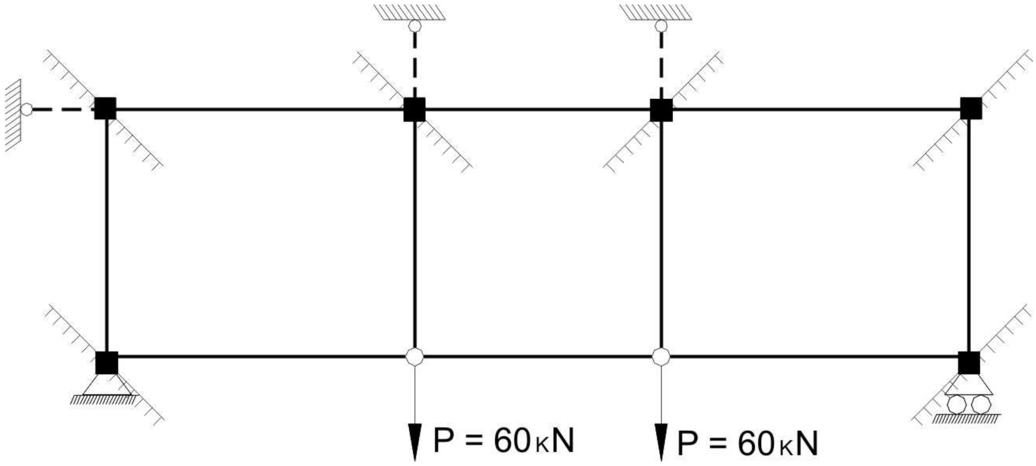


Fig. 6.53 Diagrama M_P

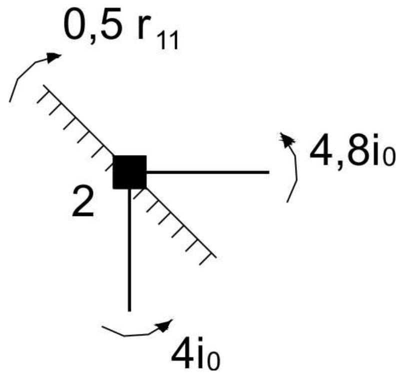
Ahora determinamos las reacciones en las conexiones adicionales, debido a cada acción en forma separada.

Hacemos un corte en la primera conexión adicional del sistema principal, para los estados de carga unitaria y externa, analizando la condición de equilibrio en los nudos. Por cuanto la reacción de la primera conexión, es la suma de los momentos de reacción en los dos empotramientos elásticos (nudos 2 y 5), entonces en concordancia con la simetría, podemos indicar, que en un empotramiento, su reacción es igual a la mitad de la reacción total.

Ahora determinamos los coeficientes del sistema de ecuaciones (a), analizando el equilibrio de las conexiones adicionales en forma consecutiva en todos los casos de cargas unitarias y de carga externa.

CONEXIÓN ADICIONAL EN EL NUDO 2:

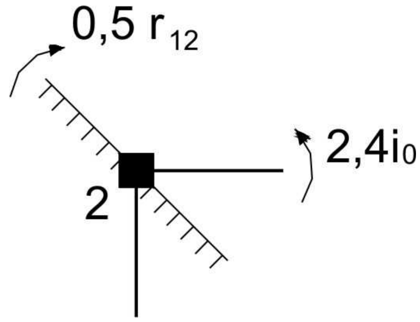
ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



$$\sum M = 0{,}5r_{11} - 4{,}8i_0 - 4i_0 = 0$$

$$r_{11} = 17{,}6i_0$$

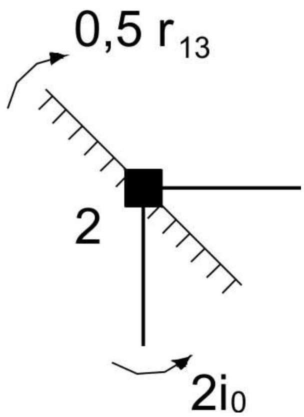
ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



$$\sum M = 0{,}5r_{12} - 2{,}4i_0 = 0$$

$$r_{12} = 4{,}8i_0$$

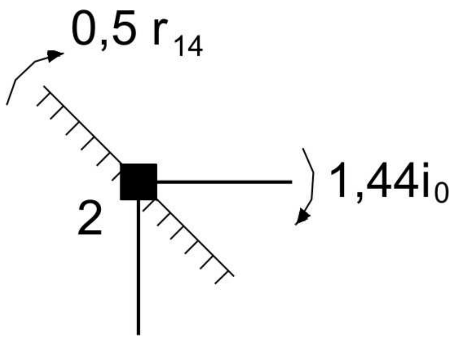
ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



$$\sum M = 0{,}5r_{13} - 2i_0 = 0$$

$$r_{13} = 4i_0$$

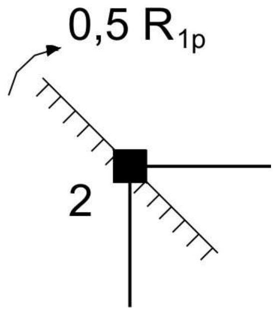
ESTADO 4 (Diagrama $\overline{M}_4$)



$$\sum M = 0{,}5r_{14} + 1{,}44i_0 = 0$$

$$r_{14} = -2{,}88i_0$$

ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)

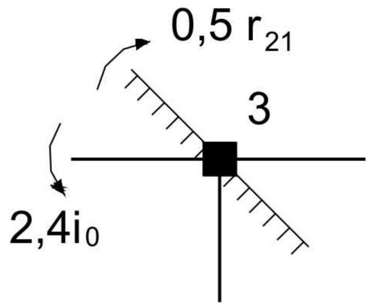


$$\sum M = 0{,}5R_{1P} = 0$$

$$R_{1P} = 0$$

CONEXIÓN ADICIONAL EN EL NUDO 3:

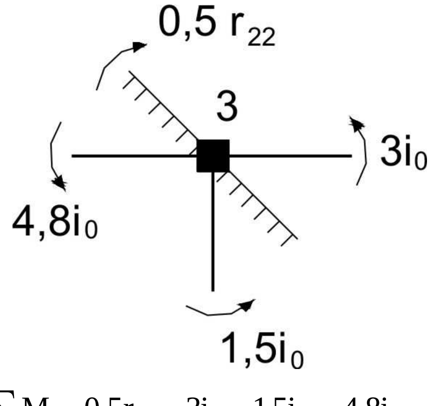
ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



$$\sum M = 0{,}5r_{21} - 2{,}4i_0 = 0$$

$$r_{21} = 4{,}8i_0$$

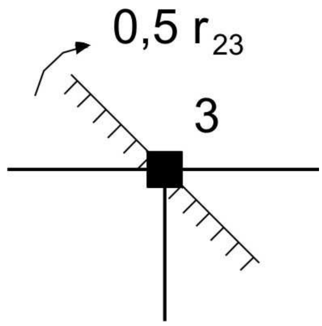
ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



$$\sum M = 0{,}5r_{22} - 3i_0 - 1{,}5i_0 - 4{,}8i_0 = 0$$

$$r_{22} = 18{,}6i_0$$

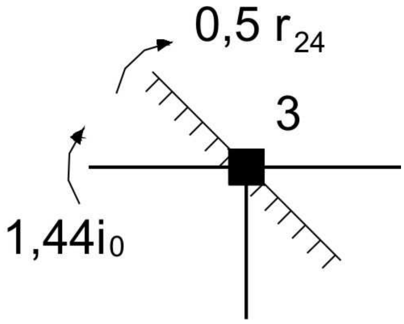
ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



$$\sum M = 0{,}5r_{23} = 0$$

$$r_{23} = 0$$

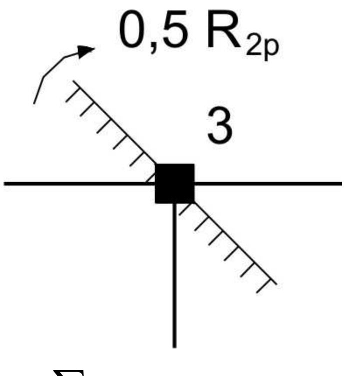
ESTADO 4 (Diagrama $\overline{M}_4$)



$$\sum M = 0{,}5r_{24} + 1{,}44i_0 = 0$$

$$r_{24} = -2{,}88i_0$$

ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)

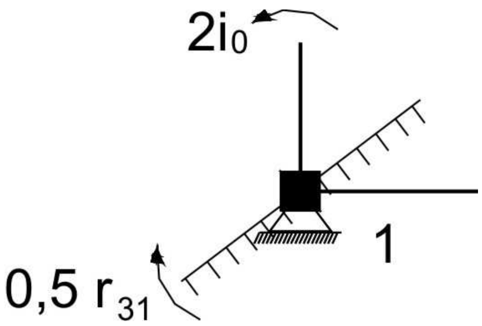


$$\sum M = 0{,}5R_{2P} = 0$$

$$R_{2P} = 0$$

CONEXIÓN ADICIONAL EN EL NUDO 1:

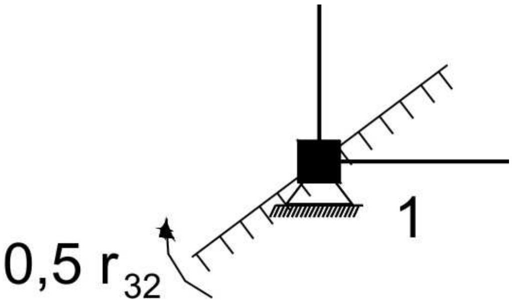
ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



$$\sum M = 0{,}5r_{31} - 2i_0 = 0$$

$$r_{31} = 4i_0$$

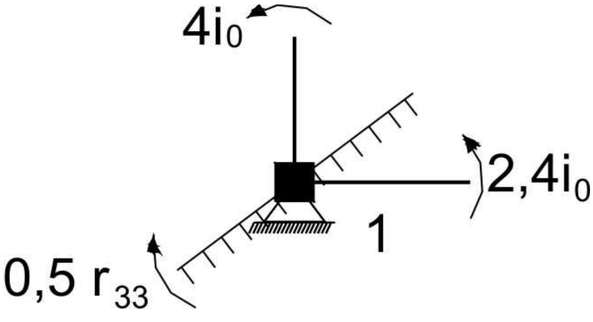
ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



$$\sum M = 0{,}5r_{32} = 0$$

$$r_{32} = 0$$

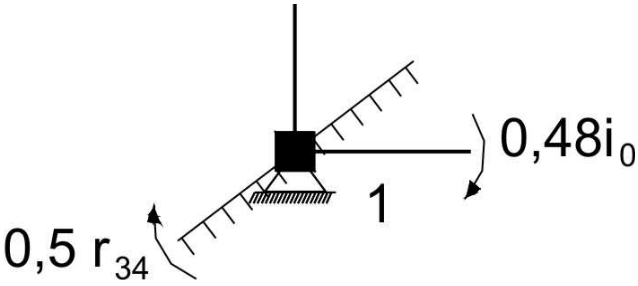
ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



$$\sum M = 0{,}5r_{33} - 4i_0 - 2{,}4i_0 = 0$$

$$r_{33} = 12{,}8i_0$$

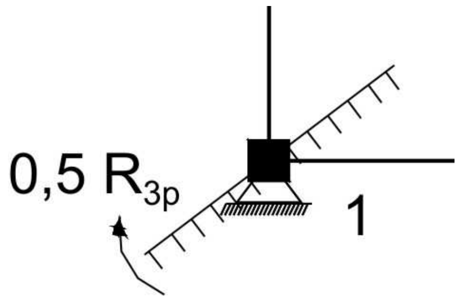
ESTADO 4 (Diagrama $\overline{M}_4$)



$$\sum M = 0{,}5r_{34} + 0{,}48i_0 = 0$$

$$r_{34} = -0{,}96i_0$$

ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)



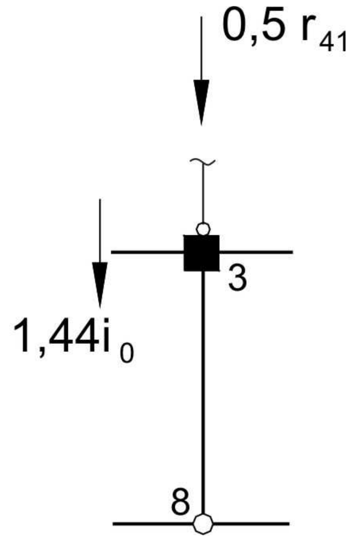
$$\sum M = 0{,}5R_{3P} = 0$$

$$R_{3P} = 0$$

Los coeficientes de la cuarta ecuación del sistema de ecuaciones (a), vienen a ser la suma de las reacciones en las dos barras adicionales, las cuales impiden el desplazamiento vertical de los elementos 3-8 y 4-7 del pórtico. Dichos coeficientes, se los puede determinar a partir de la condición de equilibrio de estos elementos. Por cuanto, la deformación del pórtico es simétrica, en consecuencia, sus fuerzas internas también serán simétricas. En base a ello, solo analizamos el equilibrio de la barra 3-8 del sistema principal, para todos los estados de carga.

Hacemos un corte en la barra 3-8 y aplicamos en los puntos de corte, las fuerzas cortantes, cuyos valores lo determinamos correspondientemente por los diagramas de momento flector. Recordamos, que la fuerza cortante es positiva, si hace girar al elemento del pórtico en sentido horario. La magnitud de la reacción en la barra adicional tipo apoyo, lo determinamos en base a la suma de las fuerzas proyectadas en el eje vertical de la parte cortada del pórtico.

ESTADO 1 (Diagrama $\overline{M}_1$)



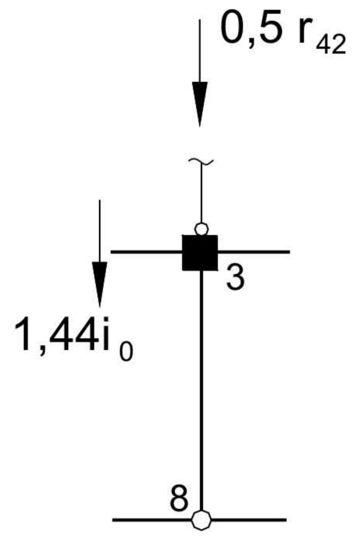
$$V_{32} = -\frac{4{,}8i_0 + 2{,}4i_0}{5} = -1{,}44i_0$$

$$V_{34} = V_{81} = V_{87} = 0$$

$$\sum F_Y = -0{,}5r_{41} - 1{,}44i_0 = 0$$

$$r_{41} = -2{,}88i_0$$

ESTADO 2 (Diagrama $\overline{M}_2$)



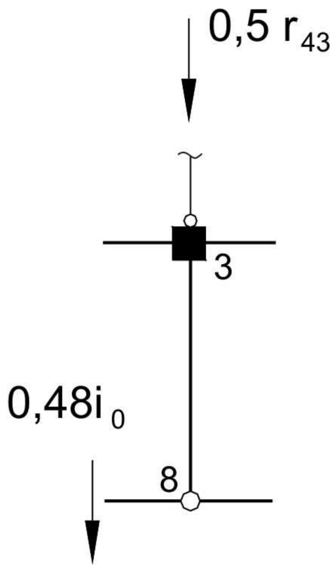
$$V_{32} = -\frac{4{,}8i_0 + 2{,}4i_0}{5} = -1{,}44i_0$$

$$V_{34} = V_{81} = V_{87} = 0$$

$$\sum F_Y = -0{,}5r_{42} - 1{,}44i_0 = 0$$

$$r_{42} = -2{,}88i_0$$

ESTADO 3 (Diagrama $\overline{M}_3$)



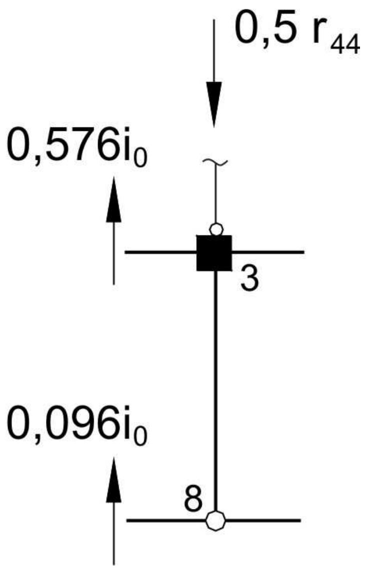
$$V_{32} = V_{34} = V_{87} = 0$$

$$V_{81} = -\frac{2{,}4i_0}{5} = -0{,}48i_0$$

$$\sum F_Y = -0{,}5r_{43} - 0{,}48i_0 = 0$$

$$r_{43} = -0{,}96i_0$$

ESTADO 4 (Diagrama $\overline{M}_4$)



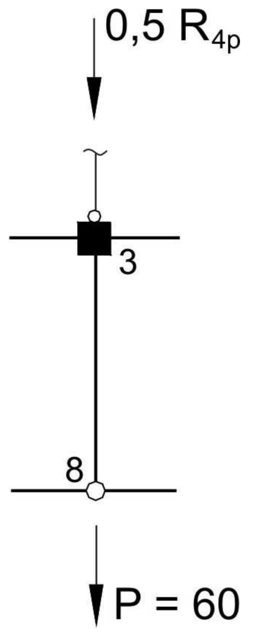
$$V_{32} = \frac{1{,}44i_0 + 1{,}44i_0}{5} = 0{,}576i_0$$

$$V_{81} = \frac{0{,}48i_0}{5} = 0{,}096i_0$$

$$\sum F_Y = -0{,}5r_{44} + 0{,}576i_0 + 0{,}096i_0 = 0$$

$$r_{44} = 1{,}344i_0$$

ESTADO DE CARGA (Diagrama M_P)



$$V_{32} = V_{34} = V_{81} = V_{87} = 0$$

$$\sum F_Y = -0{,}5R_{4P} - 60 = 0$$

$$R_{4P} = -120$$

Reemplazamos los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones (a), que quedará así:

$$17{,}6i_0Z_1 + 4{,}8i_0Z_2 + 4i_0Z_3 - 2{,}88i_0Z_4 = 0$$

$$4{,}8i_0Z_1 + 18{,}6i_0Z_2 - 2{,}88i_0Z_4 = 0$$

$$4i_0Z_1 + 12{,}8i_0Z_3 - 0{,}96i_0Z_4 = 0$$

$$-2{,}88i_0Z_1 - 2{,}88i_0Z_2 - 0{,}96i_0Z_3 + 1{,}344i_0Z_4 - 120 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos los siguientes resultados:

$$i_0Z_1 = 24{,}184$$

$$i_0Z_2 = 24{,}564$$

$$i_0Z_3 = 7{,}363$$

$$i_0Z_4 = 199{,}005$$

Comprobamos la veracidad de los resultados obtenidos, reemplazando dichos valores en la suma de las ecuaciones, es decir:

$$23{,}52i_0Z_1 + 20{,}52i_0Z_2 + 15{,}84i_0Z_3 - 5{,}376i_0Z_4 - 120 = 0$$

$$23{,}52.24{,}184+20{,}52.24{,}564+15{,}84.7{,}363-5{,}376.199{,}005-120=1189{,}491-1189{,}851=-0{,}360\approx 0$$

Error porcentual:

$$\varepsilon=\frac{0{,}360}{1189{,}491}.100\%=0{,}03\%$$

DIAGRAMA FINAL DE MOMENTO FLECTOR

Graficamos el diagrama final de momento flector, como la suma de los diagramas:

$$M_F=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_2+\overline{M}_3Z_3+\overline{M}_4Z_4+M_P$$

Para ello, multiplicamos los diagramas unitarios por los valores obtenidos, tal como se muestran en las figuras 6.54 – 6.57 y el diagrama final de momento flector será el que se muestra en la figura 6.58.

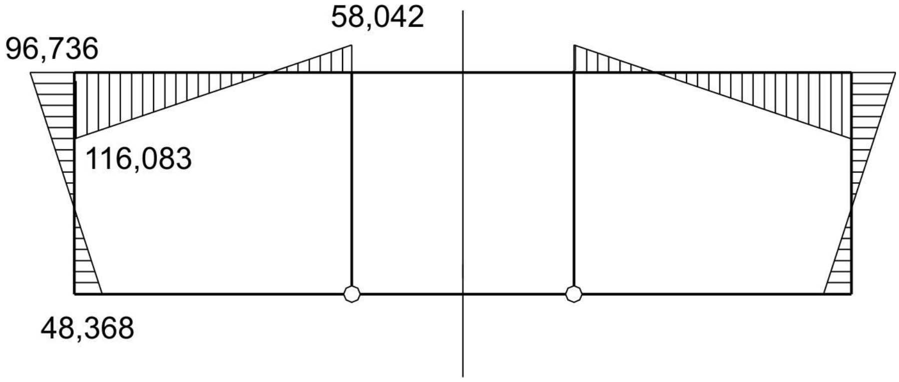


Fig. 6.54 Diagrama $\overline{M}_1Z_1$

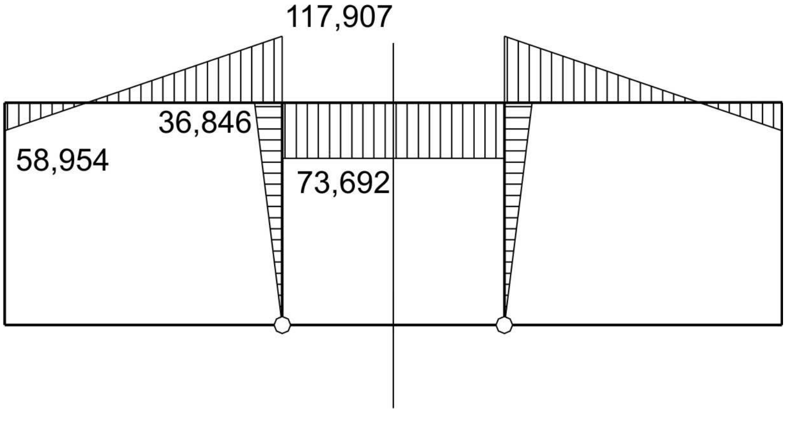


Fig. 6.55 Diagrama $\overline{M}_2Z_2$

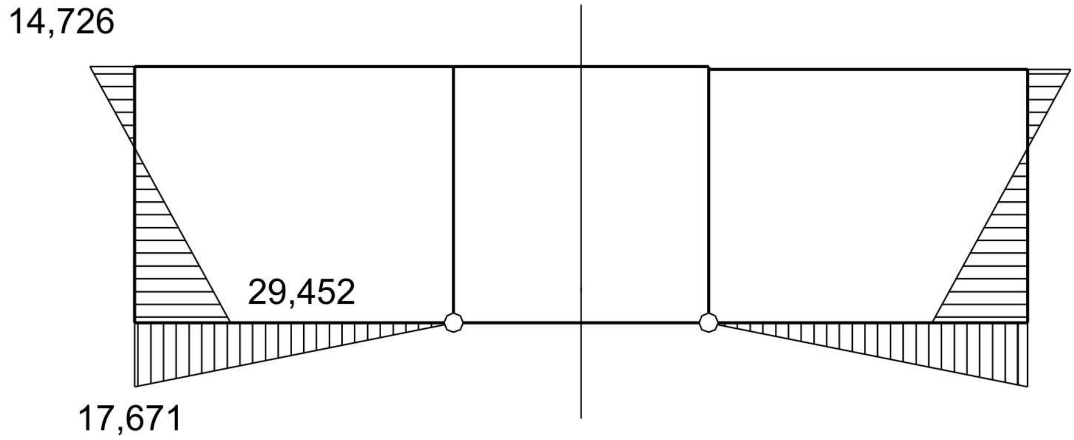


Fig. 6.56 Diagrama $\overline{M}_3 Z_3$

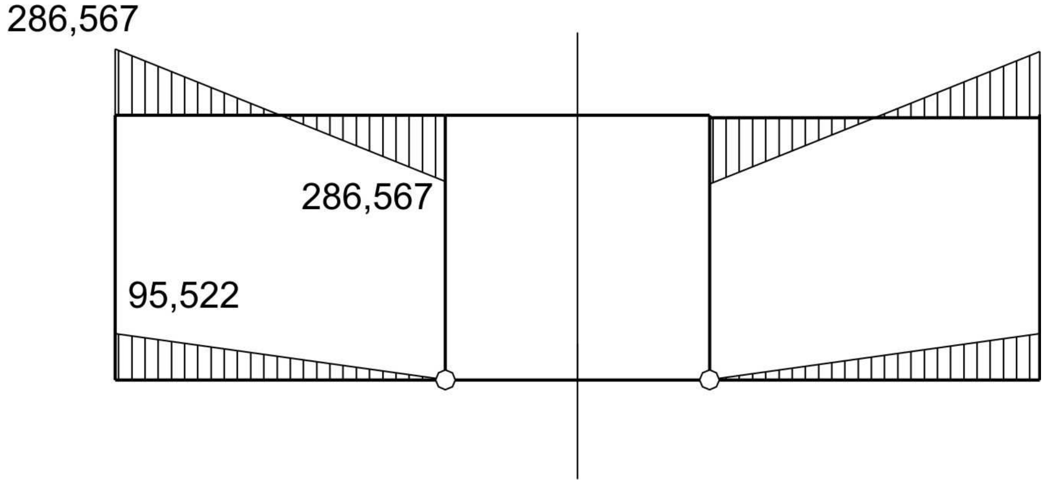


Fig. 6.57 Diagrama $\overline{M}_4 Z_4$

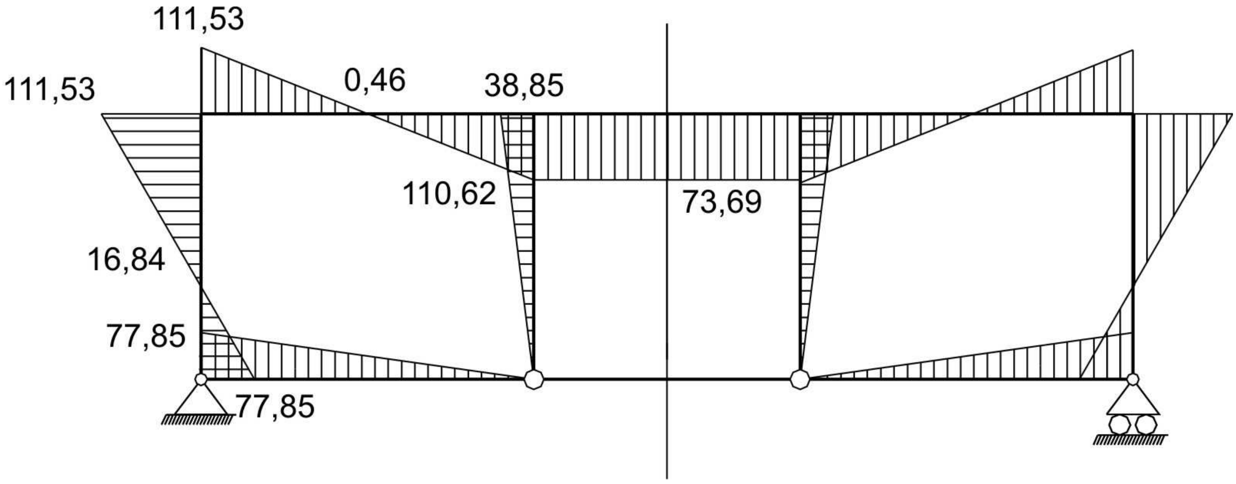


Fig. 6.58 Diagrama M_F

COMPROBACION CINEMATICA

Para efectuar la comprobación cinemática elegimos un sistema principal del método de las fuerzas (figura 6.59), en la cual graficamos el diagrama de sumatoria $\overline{M}_S$, debido a la acción conjunta de las incógnitas $X_3 = X_5 = 1$, tal como se muestra en la figura 6.60.

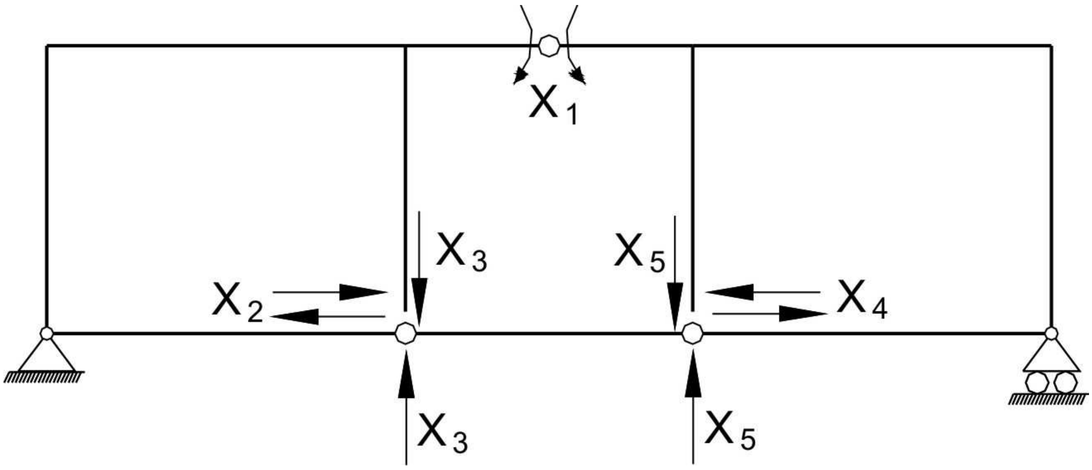


Fig. 6.59

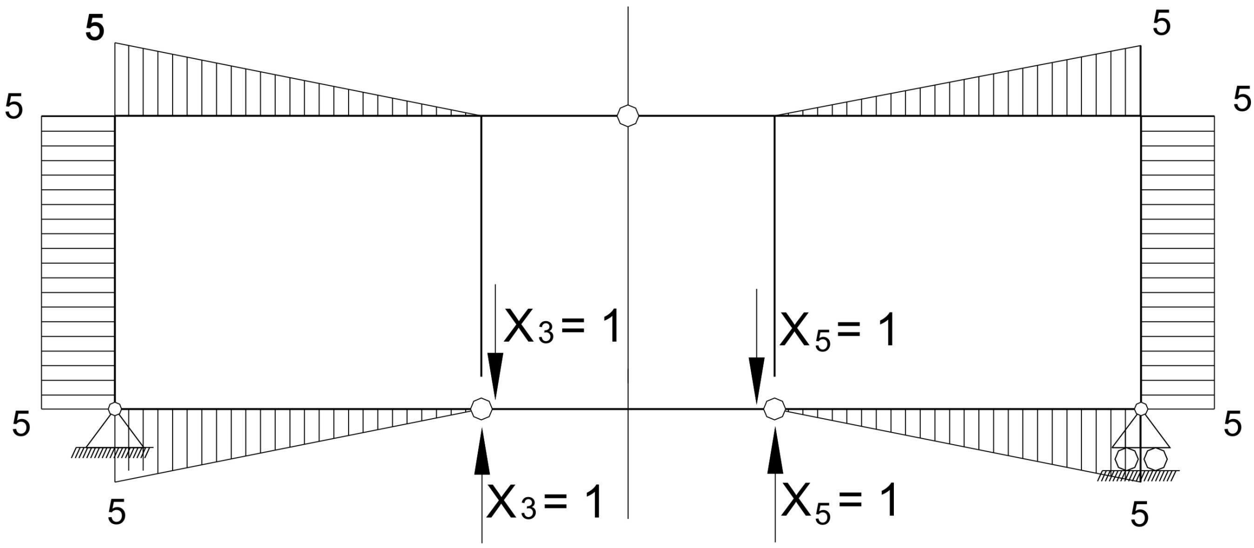


Fig. 6.60 Diagrama $\overline{M}_S$

De esta manera, se tendrá que:

$$\Delta_{SF} = \sum\int \frac{\overline{M}_S M_F}{EI}dx = 2\left\{\frac{5}{6.3EI}(5.111{,}53 + 4.2{,}5.0{,}46 + 0) + \frac{1}{2EI}.5.4.16{,}84 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2EI}.\frac{1}{2}.5.5.\frac{2}{3}.77{,}85\right\} = 2.\{156{,}181 + 168{,}400 - 324{,}375\}.\frac{1}{EI} = 2.\{324{,}581 - 324{,}375\}.\frac{1}{EI}$$

$$\Delta_{SF} = 2.\{0{,}206\}.\frac{1}{EI} \approx 0$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,206}{324,581}.100\% = 0,06\%$$

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA CORTANTE

La fuerza cortante en las barras, lo determinamos en base a la dependencia diferencial entre los diagramas M y V.

$$V_{12} = V_{21} = -\frac{111,53 + 77,85}{4} = -47,35kN$$

$$V_{23} = V_{32} = \frac{110,62 + 111,53}{5} = 44,43kN$$

$$V_{18} = V_{81} = \frac{77,85}{5} = 15,57kN$$

$$V_{38} = V_{83} = -\frac{36,85}{4} = -9,21kN$$

El diagrama V_F se muestra en la figura 6.61.

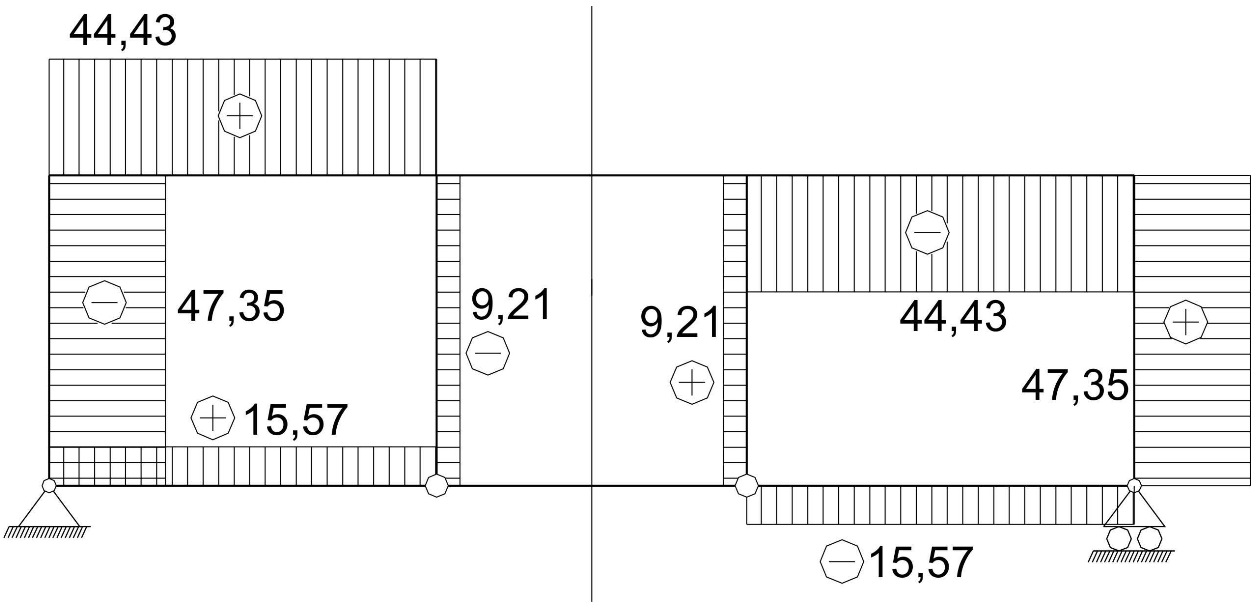


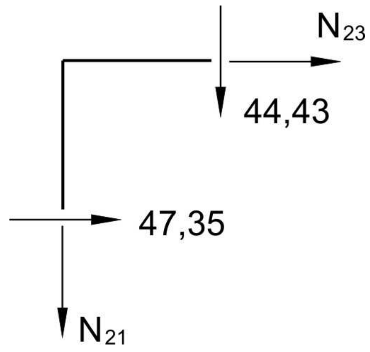
Fig. 6.61 Diagrama V_F

DIAGRAMA FINAL DE FUERZA AXIAL

Las fuerzas axiales lo determinamos en base al equilibrio de los nudos del pórtico. Para ello, en cada nudo incorporamos las fuerzas externas y las fuerzas internas, calculadas previamente y analizamos en forma consecutiva nudo a nudo.

Se puede apreciar, que en los nudos 1 y 6 actúan las reacciones en los apoyos, que es igual a 60kN y en los nudos 7 y 8 las fuerzas externas $P = 60kN$.

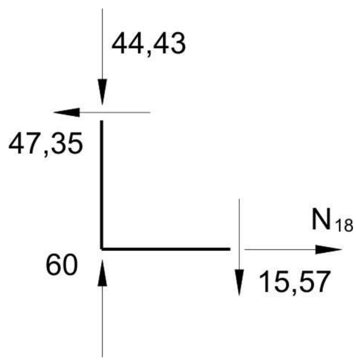
NUDO 2



$\sum F_X = 0$, $N_{23} = -47{,}35 kN$

$\sum F_Y = 0$, $N_{21} = -44{,}43 kN$

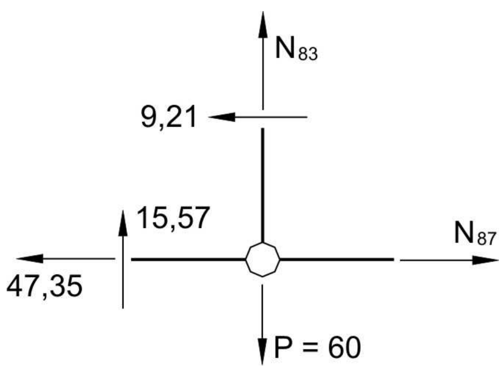
NUDO 1



$\sum F_X = 0$, $N_{18} = 47{,}35 kN$

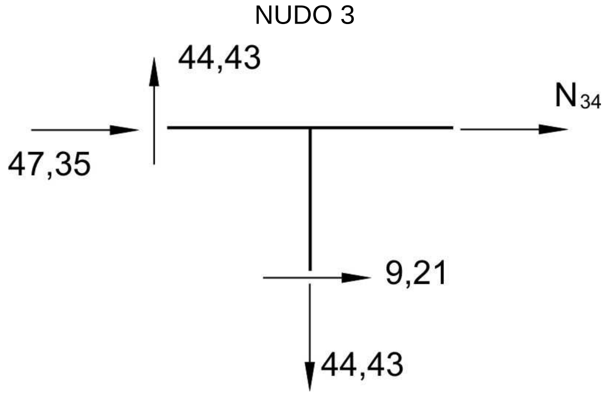
$\sum F_Y = 0$, $60 - 44{,}43 - 15{,}57 = 0$

NUDO 8



$\sum F_X = 0$, $N_{87} = 56{,}56 kN$

$\sum F_Y = 0$, $N_{83} = 44{,}43 kN$



$$\sum F_X = 0, \qquad N_{34} = -56{,}56 kN$$

$$\sum F_Y = 0, \qquad 44{,}43 - 44{,}43 = 0$$

El diagrama final de fuerza axial N_F, se muestra en la figura 6.62.

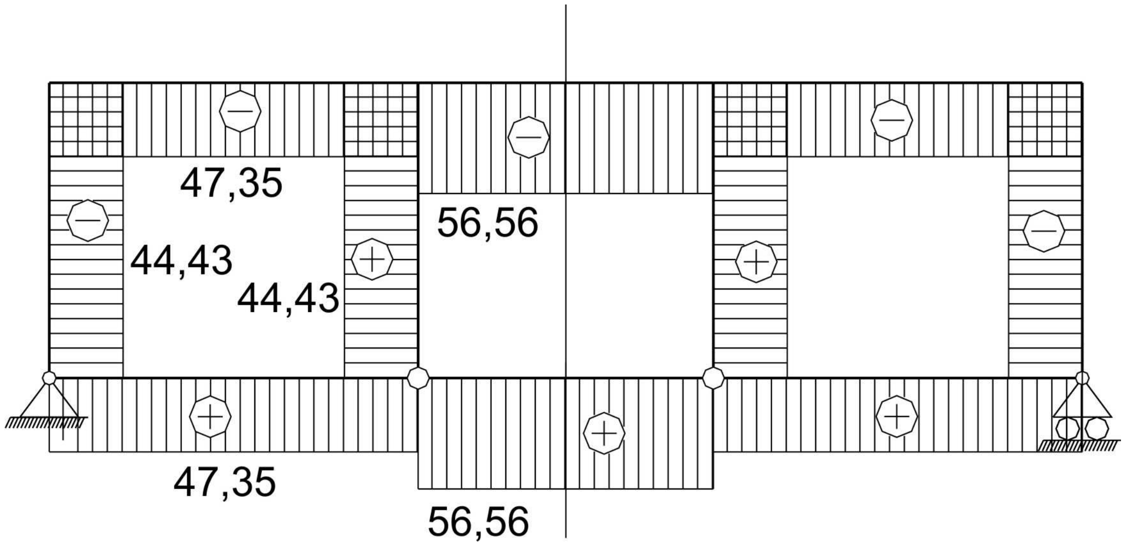


Fig. 6.62 Diagrama N_F

COMPROBACION DE EQUILIBRIO TOTAL

Comprobamos el equilibrio total, analizando una parte del pórtico, sometido a las cargas externas e internas mostradas en la figura 6.63.

$$\sum F_X = 56{,}56 - 47{,}35 - 9{,}21 = 0$$

$$\sum F_Y = 60 + 44{,}43 - 44{,}43 - 60 = 0$$

$$\sum M_A = 60.5 - 44{,}43.5 - 77{,}85 = 0$$

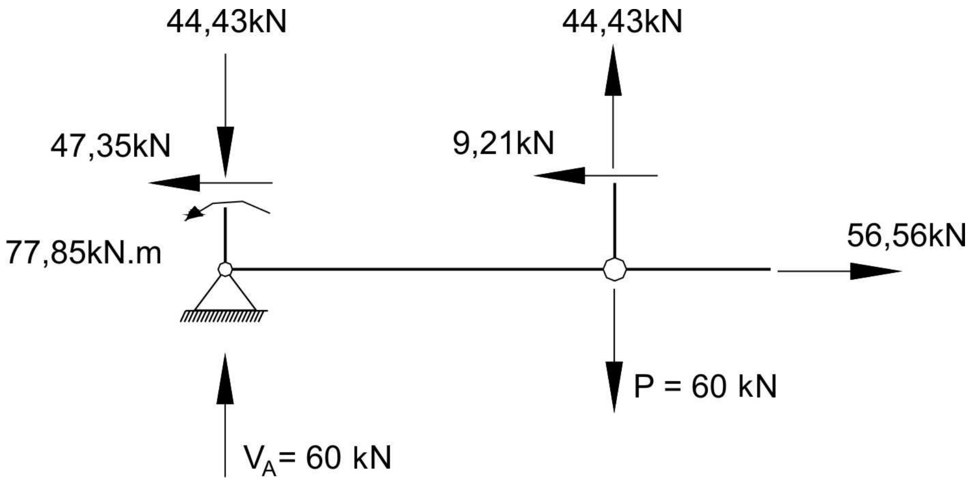


Fig. 6.63

CAPITULO 7

VIGAS SOBRE BASES ELASTICAS

En su quehacer profesional, el Ingeniero Civil calcula y construye zapatas conectadas o cimientos corridos sobre bases elásticas (suelo de fundación), pudiéndolo hacer en forma independiente y sometiéndolo a las cargas de la superestructura (edificación).

En la actualidad, esta es una de las áreas de investigación, cuyos modelos matemáticos y físicos aun tienen un sinnúmero de espectros no determinados, ni modelados.

Como casos típicos de vigas sobre bases elásticas, se pueden indicar las vigas de cimentación, cimientos corridos, cimientos de presas, rieles de tren, cuyo número de apoyos es bastante grande y la distancia entre ellos es pequeña en comparación con su longitud.

El cálculo de vigas sobre bases elásticas, se fundamenta en la solución del problema de contacto entre la cimentación y el suelo de fundación, sometido a las cargas actuantes de la edificación. La complejidad de la solución de los problemas de contacto, es bastante conocido por su grado de dificultad científica. Por ello, para la solución de problemas ingenieriles, se utilizan métodos aproximados, cuya fundamentación se basa en la dependencia entre la presión del suelo y el asentamiento de la cimentación.

Una de las hipótesis más conocidas es el *Modelo de Winkler E.*, llamado también hipótesis de dependencia entre la reacción y el asentamiento. En dicho modelo, se considera solo un módulo de balasto, comúnmente conocido como coeficiente de subrasante o de compresión elástica uniforme, el cual se puede obtener en forma experimental, a través de ensayos de laboratorio o mediante la tabla 7.1.

Tabla 7.1

Tipo de suelo	Símbolo	K_S (kg/cm^3)	
		Rango	Promedio
Gravas bien graduadas	GW	14 – 20	17
Gravas arcillosas	GC	11 – 19	15
Gravas mal graduadas	GP	8 – 14	11
Gravas limosas	GM	6 – 14	10
Arenas bien graduadas	SW	6 – 16	11
Arenas arcillosas	SC	6 – 16	11
Arenas mal graduadas	SP	5 – 9	7
Arenas limosas	SM	5 – 9	7
Limos orgánicos	ML	4 – 8	6
Arcillas con grava o con arena	CL	4 – 6	5
Limos orgánicos y arcillas limosas	OL	3 – 5	4
Limos inorgánicos	MH	1 – 5	3
Arcillas inorgánicas	CH	1 – 5	3
Arcillas orgánicas	OH	1 – 4	2

7.1 DEPENDENCIAS FUNDAMENTALES

7.1.1. Características principales de cálculo de vigas sobre bases elásticas

a) Coeficiente de proporcionalidad

$$K = K_S b \tag{7.1}$$

Donde:

K_S - módulo de Balasto

b - ancho de la viga

b) Rigidez de la viga en flexión (EI), siendo:

E - módulo de elasticidad del material de la viga

I - momento de inercia de la sección de la viga, igual a $\frac{bh^3}{12}$ para sección rectangular

c) El valor de β, se determina por la fórmula 7.2.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \tag{7.2}$$

d) El tipo de viga se determina por la magnitud $\beta.L$, siendo corta si $1 \leq \beta.L < 5$.

e) Los valores de las funciones hiperbo-trigonométricas A, B, C, D correspondiente a las magnitudes $\beta x, \beta(x-a), \beta(x-b), \beta(x-c), \beta(x-d)$ se calculan para dos valores de x: $x = L$ (longitud total de la viga) y $x = x_k$ (distancia del extremo izquierdo hasta la sección k, donde es necesario calcular los desplazamientos y fuerzas).

Siendo a_i, b_i, c_i, d_i las distancias correspondientes del extremo izquierdo de la viga hasta la sección en la cual actúan el momento flector M_i, fuerza F_i, inicio y término de la acción de la carga distribuida w_i (figura 7.1).

La tabla de funciones hiperbo-trigonométricas está dada en el anexo del presente libro.

f) Las condiciones de extremo de la viga se determinan a través de la figura 7.2.

7.1.2. Cálculo de vigas cortas por el Método de Parámetros Iniciales

DEFLEXION

$$y_x = y_0 A_x + \frac{\theta_0}{\beta} B_x - \frac{M_0}{EI\beta^2} C_x - \frac{V_0}{EI\beta^3} D_x + \sum \frac{M}{EI\beta^2} C_{x-a} + \sum \frac{F}{EI\beta^3} D_{x-b} - \sum \frac{w}{4EI\beta^4} (A_{x-c} - A_{x-d})$$

……………………………………. (7.3)

ANGULO DE GIRO

$$\theta_x = \theta_0 A_x - \frac{M_0}{EI\beta} B_x - \frac{V_0}{EI\beta^2} C_x - 4y_0 \beta D_x + \sum \frac{M}{EI\beta} B_{x-a} + \sum \frac{F}{EI\beta^2} C_{x-b} + \sum \frac{w}{EI\beta^3} (D_{x-c} - D_{x-d})$$

……………………………………. (7.4)

MOMENTO FLECTOR

$$M_x = M_0 A_x + \frac{V_0}{\beta} B_x + 4EI\beta^2 y_0 C_x + 4EI\beta\theta_0 D_x - \sum M A_{x-a} - \sum \frac{F}{\beta} B_{x-b} - \sum \frac{w}{\beta^2}(C_{x-c} - C_{x-d})$$

.... (7.5)

FUERZA CORTANTE

$$V_x = V_0 A_x + 4EI\beta^3 y_0 B_x + 4EI\beta^2 \theta_0 C_x - 4\beta M_0 D_x + \sum 4\beta M D_{x-a} - \sum F A_{x-b} - \sum \frac{w}{\beta}(B_{x-c} - B_{x-d})$$

.... (7.6)

Donde:

y_0, θ_0, M_0, V_0 - parámetros iniciales (desplazamientos y fuerzas en el extremo izquierdo de la viga).

M, F, w - cargas actuantes en la viga, ubicadas en la parte izquierda de una sección determinada; por ejemplo, a una distancia x del extremo izquierdo (figura 7.1).

A, B, C, D - funciones hiperbo-trigonométricas.

$x, (x-a), (x-b), (x-c), (x-d)$ - indica que las funciones hay que interpolarlos de acuerdo a las magnitudes $\beta x, \beta(x-a), \beta(x-b), \beta(x-c), \beta(x-d)$.

Cabe indicar, que si las cargas actúan en las mismas direcciones que la figura 7.1, tienen signo positivo (+) y si son opuestas, serán negativas (-).

Los parámetros iniciales desconocidos se determinarán de acuerdo a las condiciones de extremo, usando las fórmulas 7.3 – 7.6 y resolviendo el sistema de ecuaciones para las magnitudes conocidas en el extremo derecho, o sea cuando $x = L$.

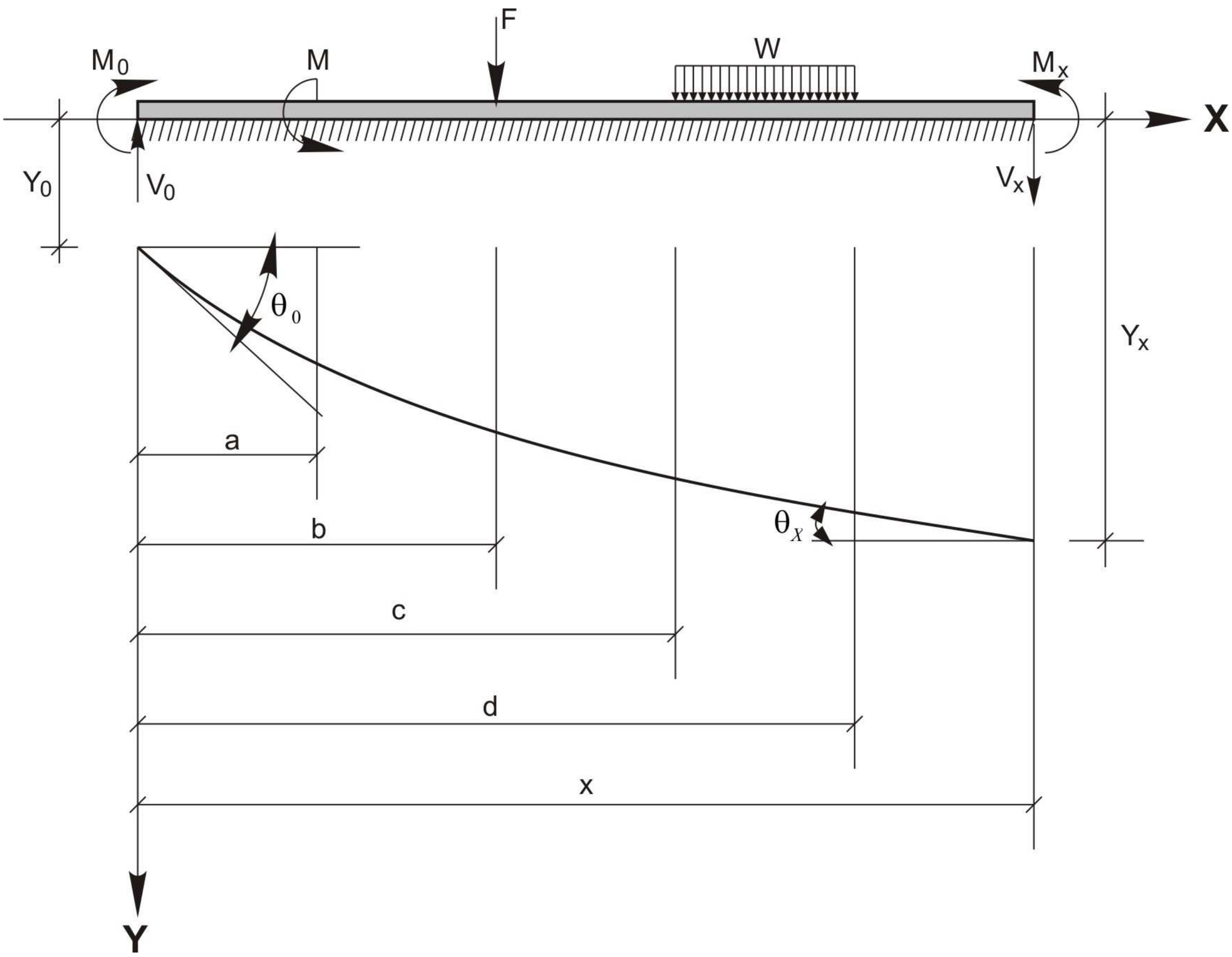


Fig. 7.1

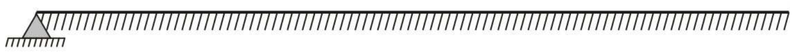
1



Y_0 =? $\qquad$ M_L = Conocido

θ_0 =? $\qquad$ V_L = Conocido

2



θ_0 =? $\qquad$ M_L = Conocido

V_0 =? $\qquad$ V_L = Conocido

3



$Y_0 = ?$ $\quad$ $Y_L = 0$

$\theta_0 = ?$ $\quad$ M_L = Conocido

4



$Y_0 = ?$ $\quad$ $Y_L = 0$

$\theta_0 = ?$ $\quad$ $\theta_L = 0$

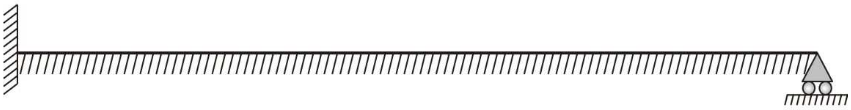
5



$M_0 = ?$ $\quad$ M_L = Conocido

$V_0 = ?$ $\quad$ V_L = Conocido

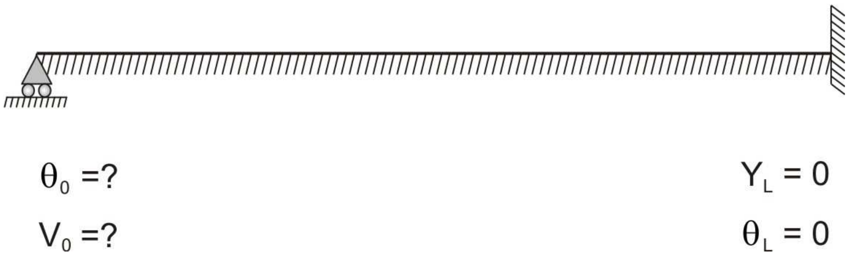
6



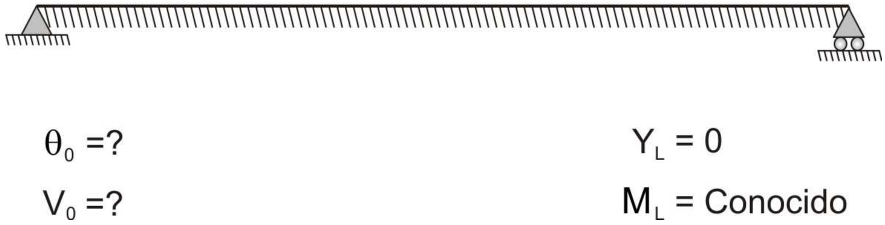
$M_0 = ?$ $\quad$ $Y_L = 0$

$V_0 = ?$ $\quad$ M_L = Conocido

7



8



9

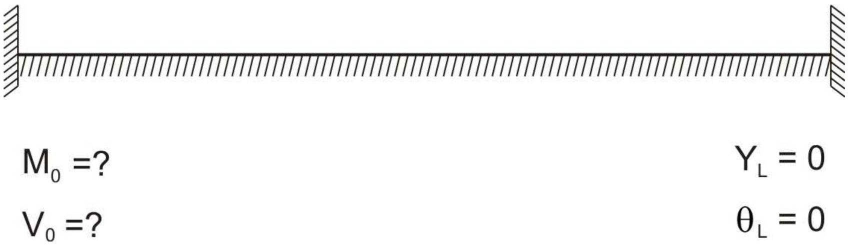


Fig. 7.2

7.1.3. Los valores de deflexión y_{x_1}, ángulo de giro θ_{x_1}, momento flector M_{x_1} y fuerza cortante V_{x_1} para la sección ubicada a una distancia x_1 del extremo izquierdo de la viga, se determinan por las fórmulas del método de parámetros iniciales. Para ello, solo se consideran las cargas ubicadas al lado izquierdo de la sección y se usan las funciones hiperbo-trigonométricas A, B, C, D correspondiente a tal sección, esto es a βx_1, $\beta(x_1 - a)$, $\beta(x_1 - b)$, $\beta(x_1 - c)$, $\beta(x_1 - d)$.

La reacción de la base elástica se determina por la fórmula:

$$w_0 = -Ky \qquad (7.7)$$

Para dicha sección, los resultados obtenidos se compararán con los del programa BEAM.

7.1.4. Los diagramas $y_x, \theta_x, M_x, V_x, w_{0x}$ se grafican de acuerdo a los resultados obtenidos por el programa BEAM.

Entre las funciones $y_x, \theta_x, M_x, V_x, w_{0x}$ existen las siguientes relaciones:

$$\frac{dy_x}{dx} = \theta_x$$

$$EI\frac{d\theta_x}{dx} = -M_x \qquad (7.8)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x$$

$$\frac{dV_x}{dx} = -w + w_{0x}$$

Estas relaciones reflejan las propiedades de las derivadas, las cuales son usadas para comprobar los diagramas de desplazamiento y fuerzas interiores. En las curvas que limitan el diagrama se debe de mostrar claramente la curvatura, punto de flexión, extremos y otros.

Es necesario comprobar el equilibrio de la viga o su sección de corte, igualando a cero la suma de las proyecciones de las fuerzas en el eje vertical y la suma de los momentos respecto a un punto determinado.

La reacción de la base con magnitud variable por toda su longitud se incluye en la ecuación de equilibrio en la forma de una integral determinada por la longitud x (figura 7.3), el cual se puede calcular aproximadamente por la fórmula del trapecio:

$$y = \int_x w_0 dx = -\frac{\Delta x}{2}(w_{00} + 2w_{01} + 2w_{02} + ... + 2w_{0(n-1)} + w_{0n}) \qquad (7.9)$$

$$M_B = \int_x w_0 x dx = \frac{\Delta x^2}{2}\left[w_{00}n + 2w_{01}(n-1) + 2w_{02}(n-2) + ... + 2w_{0(n-1)}.1\right] \qquad (7.10)$$

Donde:

x - intervalo de integración, igual a la longitud de la viga o parte de ella

n - número de partes iguales, que se ha dividido el intervalo de integración

$w_{00}, w_{01}, ..., w_{0n}$ - valores de las reacciones de la base en los puntos de división del intervalo de integración.

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

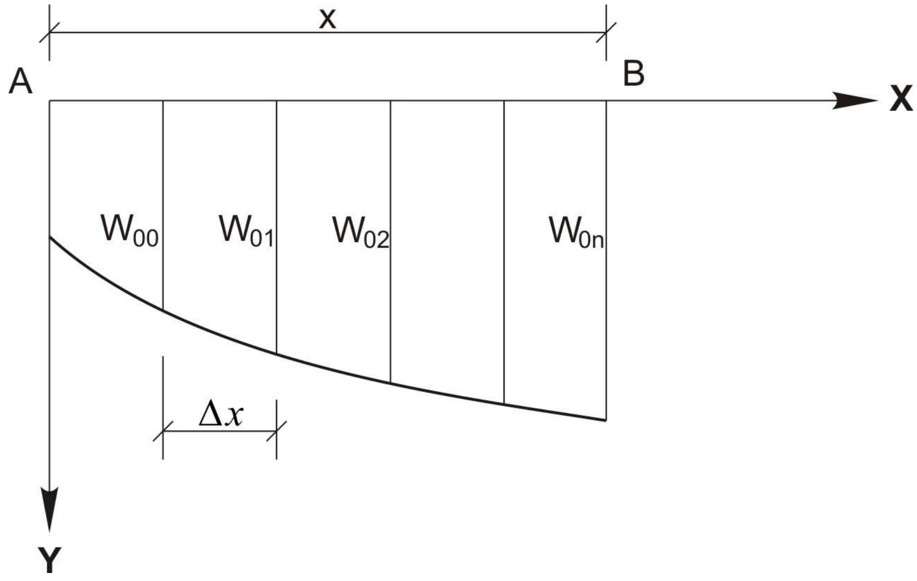


Fig. 7.3

7.2 CALCULO ANALITICO DE VIGA SOBRE BASE ELASTICA

Determine los desplazamientos, fuerzas internas y reacciones de la base elástica, si:

$h = 0{,}6\text{m}$; $b = 1\text{m}$; $E = 2.10^7\,\text{kN}/\text{m}^2$; $K_S = 10^4\,\text{kN}/\text{m}^3$ (Módulo de Balasto)

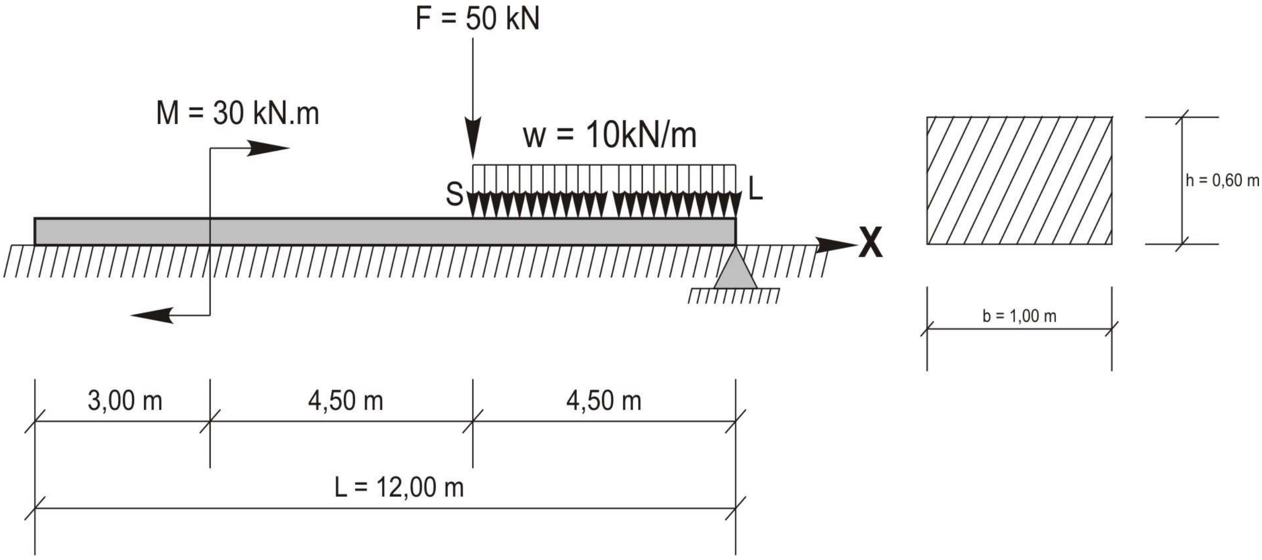


Fig. 7.4

1. Determinamos las principales características de cálculo, a través de 7.1.1

   a) Coeficiente de proporcionalidad

   $$K = K_S b = 10^4.1 = 10^4\,\text{kN}/\text{m}^2$$

b) Rigidez de la viga

$$EI = E\frac{bh^3}{12} = \frac{2.10^7.1.0,6^3}{12} = 36.10^4 \, kN.m^2$$

c) Valor de β

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{10^4}{4.36.10^4}} = 0,2887m^{-1}$$

d) Tipo de viga

$\beta.L = 0,2887.12 = 3,4644 < 5$ (Viga corta)

e) Los valores de las funciones hiperbo-trigonométricas, correspondientes a los puntos $L(x = L = 12m)$ y $S(x_1 = 7,5m)$ son:

Abcisa (m)	βx	A	B	C	D
		PUNTO L $(x = L = 12m)$			
$L = 12$	3,4644	-15,16557	-10,10874	-2,53586	2,51355
$L - a = 9$	2,5983	-5,78491	-1,11413	1,72727	2,30352
$L - b = 4,5$	1,2991	0,52843	1,17619	0,81725	0,36049
$L - c = 4,5$	1,2991	0,52843	1,17619	0,81725	0,36049
$L - d = 0$	0,0000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
		PUNTO S $(x = x_1 = 7,5m)$			
$x_1 = 7,5$	2,1652	-2,47467	0,62328	1,78092	1,51688
$x_1 - a = 4,5$	1,2991	0,52843	1,17619	0,81725	0,36049

2. Determinamos los parámetros iniciales

Si $x = 0$, entonces $M_0 = M_{x=0} = 0$, $V_0 = V_{x=0} = 0$

$y_0 = y_{x=0} = ?$, $\theta_0 = \theta_{x=0} = ?$

Si $x = 12m$, entonces $y_L = y_{x=12} = 0$, $M_L = M_{x=12} = 0$

$\theta_L = \theta_{x=12} = ?$, $V_L = V_{x=12} = ?$

Usando el método de parámetros iniciales, describimos las ecuaciones para la deflexión y momento flector:

$$y_0 A_L + \frac{\theta_0}{\beta} B_L + \frac{M}{EI\beta^2} C_{L-a} + \frac{F}{EI\beta^3} D_{L-b} - \frac{w}{4EI\beta^4}(A_{L-c} - A_{L-d}) = 0$$

$$4EI\beta^2 y_0 C_L + 4EI\beta\theta_0 D_L - MA_{L-a} - \frac{F}{\beta} B_{L-b} - \frac{w}{\beta^2}(C_{L-c} - C_{L-d}) = 0$$

Reemplazamos los valores de cálculo de las principales características y funciones hiperbo-trigonométricas, obteniéndose:

$$y_0(-15{,}16557)+\frac{\theta_0}{0{,}2887}(-10{,}10874)-\frac{30.1{,}72727}{36.10^4.0{,}2887^2}+\frac{50.0{,}36049}{36.10^4.0{,}2887^3}-\frac{10(0{,}52843-1)}{4.36.10^4.0{,}2887^4}=0$$

$$4.36.10^4.0{,}2887^2.(-2{,}53586)y_0+4.36.10^4.0{,}2887.2{,}513555\theta_0-(-30)(-5{,}78491)-\frac{50.1{,}17619}{0{,}2887}-$$

$$-\frac{10(0{,}81725-0)}{0{,}2887^2}=0$$

Efectuando operaciones se obtendrá:

$$-15{,}16557y_0-35{,}01469\theta_0=-0{,}82519.10^{-3}$$

$$-0{,}30435y_0+1{,}044950\theta_0=0{,}47530.10^{-3}$$

De donde:

$$y_0=-0{,}59539.10^{-3}\,m$$

$$\theta_0=0{,}28144.10^{-3}\,rad$$

Los resultados del cálculo con el programa BEAM son:

$$y_0=-0{,}595329.10^{-3}\,m$$

$$\theta_0=0{,}281532.10^{-3}\,rad$$

3. Calculamos los valores y,θ,M,V,w_0 en la sección S $(x=7{,}5m)$

$$y=y_0A_x+\frac{\theta_0}{\beta}B_x+\frac{M}{EI\beta^2}C_{x-a}$$

$$y.10^3=(-0{,}59539)(-2{,}47467)+\frac{0{,}28144.0{,}62328}{0{,}2887}-\frac{30.0{,}81725.10^3}{36.10^4.0{,}2887^2}$$

$$y=0{,}126389.10^{-2}\,m$$

$$\theta=\theta_0A_x-4y_0\beta D_x+\frac{M}{EI\beta}B_{x-a}$$

$$\theta.10^3=0{,}281532(-2{,}47467)-4(-0{,}59539).0{,}2887.1{,}51688-\frac{30.1{,}17619.10^3}{36.10^4.0{,}2887}$$

$$\theta=0{,}67341.10^{-5}\,rad$$

$$M=4EI\beta^2y_0C_x+4EI\beta\theta_0D_x-MA_{x-a}$$

$$M=4.36.10^4.0{,}2887^2.(-0{,}59539.10^{-3}).1{,}78092+4.36.10^4.0{,}2887.0{,}28144.10^{-3}.1{,}51688-$$

$$-(-30).0{,}52843=66{,}0687kN.m$$

$$V=4EI\beta^3y_0B_x+4EI\beta^2\theta_0C_x+4\beta MD_{x-a}$$

$$V^{izq}=4.36.10^4.0{,}2887^3.(-0{,}59539.10^{-3}).0{,}62328+4.36.10^4.0{,}2887^2.0{,}28144.10^{-3}.1{,}78092-$$

$$-4.0{,}2887.30.0{,}36049 = 34{,}80978\text{kN}$$

$$V^{der} = 34{,}80978 - 50 = -15{,}19022\text{kN}$$

$$w_0 = -Ky = -10^4.0{,}126389.10^{-2} = -12{,}6389\text{kN}/\text{m}$$

Los resultados de los desplazamientos, fuerzas internas y reacciones prácticamente coinciden con los resultados del programa BEAM:

$$y = 0{,}126427.10^{-2}\,\text{m}$$

$$\theta = 0{,}689458.10^{-5}\,\text{rad}$$

$$M = 65{,}0774\text{kN.m}$$

$$V^{izq} = 34{,}8139\text{kN}$$

$$V^{der} = -15{,}1861\text{kN}$$

$$w_0 = -12{,}6427\text{kN}/\text{m}$$

4. En función de los resultados obtenidos por el programa BEAM, graficamos los diagramas de desplazamientos, fuerzas internas y reacción de la base elástica (figura 7.5).

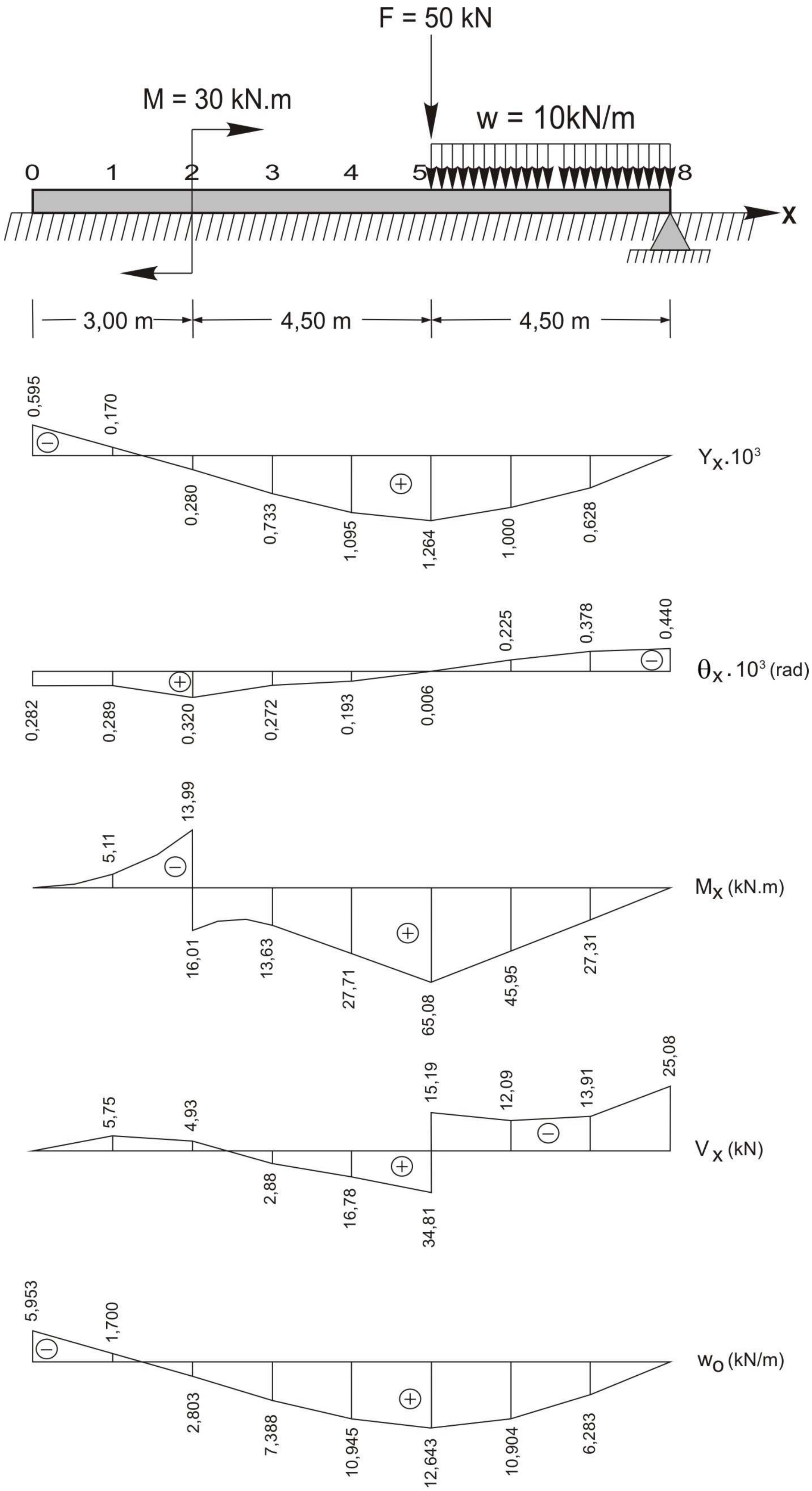

F = 50 kN
M = 30 kN.m
w = 10kN/m
0 1 2 3 4 5 8
X
3,00 m
4,50 m
4,50 m
0,595
0,170
0,280
0,733
1,095
1,264
1,000
0,628
$Y_x \cdot 10^3$
0,225
0,378
0,440
0,282
0,289
0,320
0,272
0,193
0,006
$\theta_x \cdot 10^3$ (rad)
13,99
5,11
16,01
13,63
27,71
65,08
45,95
27,31
M_x (kN.m)
5,75
4,93
15,19
12,09
13,91
25,08
2,88
16,78
34,81
V_x (kN)
5,953
1,700
2,803
7,388
10,945
12,643
10,904
6,283
w_o (kN/m)

Fig. 7.5

Hacemos un corte en el punto 4 y comprobamos el equilibrio de la parte derecha de la viga (figura 7.6).

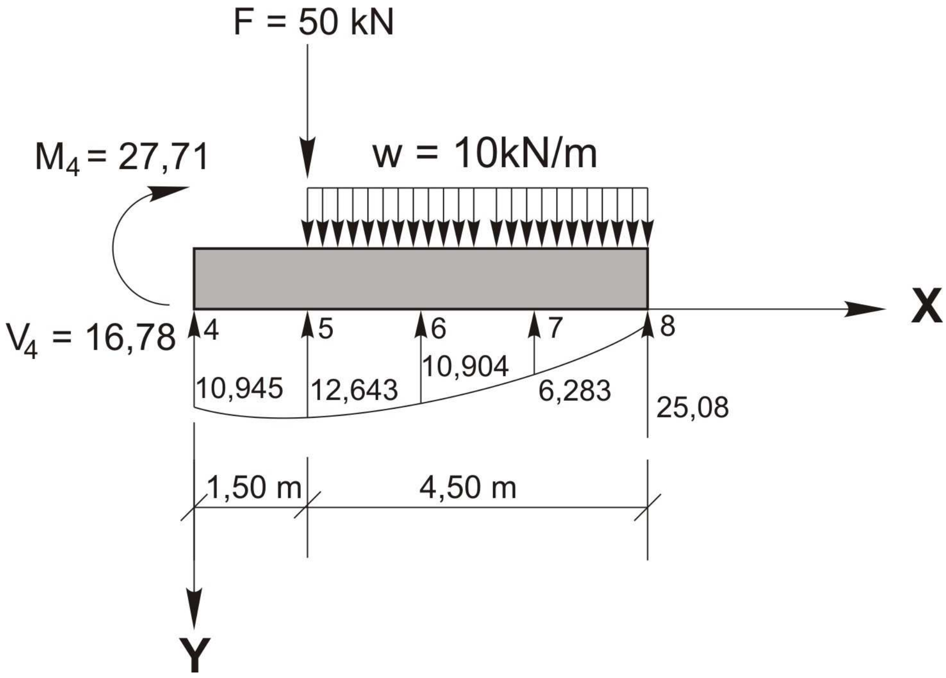


Fig. 7.6

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = -16,78 - 25,08 + 50 + 10.4,5 - \frac{1,5}{2}(10,945 + 2.12,643 + 2.10,904 + 2.6,283)$$

$$\sum F_Y = 95 - 94,814 = 0,186$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,186}{95}.100\% = 0,196\%$$

$$\sum M_8 = 0$$

$$\sum M_8 = -27,71 - 16,78.6 + 50.4,5 + 10.4,5.2,25 - \frac{1,5^2}{2}(10,945.4 + 2.12,643.3 + 2.10,904.2 + 2.6,283.1)$$

$$\sum M_8 = 326,25 - 326,188 = 0,062$$

Error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{0,062}{326,25}.100\% = 0,019\%$$

CAPITULO 8

ESTRUCTURAS DE PAREDES DELGADAS

8.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En su quehacer profesional, el Ingeniero Civil calcula y construye estructuras de paredes delgadas de sección abierta, sometidos a flexión y torsión restringida, debiendo, para ello, conocer el fundamento de la teoría del célebre científico ruso D.Sc., Prof. Vlasov V.Z.

Se considera que una barra es de pared delgada, si su longitud, distancia media de su sección transversal y el espesor de la pared son de magnitudes de diferente orden $(L \gg b \gg \delta)$, tal como se muestra en la figura 8.1.

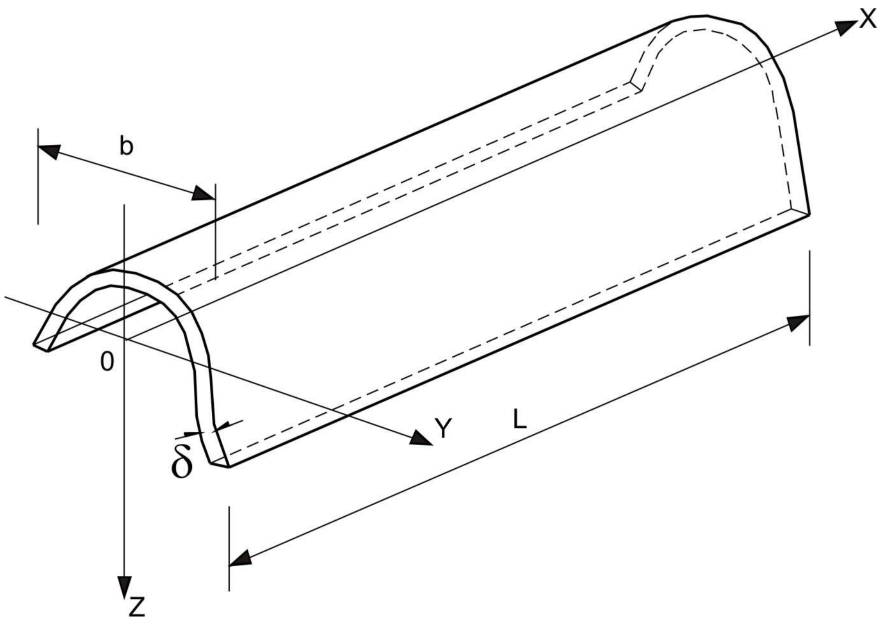


Fig. 8.1

La superficie que divide en dos partes iguales el espesor de la pared, se denomina *superficie media* y la línea que divide la sección de la pared en dos partes iguales, se llama *línea media* (figura 8.2). En adelante, la línea media se llamará *contorno de la sección transversal*.

Por su naturaleza, las estructuras de paredes delgadas se dividen en estructuras de paredes delgadas de sección cerrada y estructuras de paredes delgadas de sección abierta.

En el cálculo de estructuras de paredes delgadas de sección abierta a la tracción o compresión y flexión desviada, se considera aplicable la hipótesis de secciones planas. Para ello, los esfuerzos normales y tangenciales se determinan por las fórmulas de resistencia compuesta. En el caso de torsión de estructuras de paredes delgadas, dicha hipótesis no es aplicable y surge el efecto de *alabeo* (curvatura de la sección en su plano).

Torsión en la cual la sección transversal no se resiste al alabeo libre, se llama *torsión pura o libre*. En este caso, surgen solamente los esfuerzos tangenciales de torsión pura.

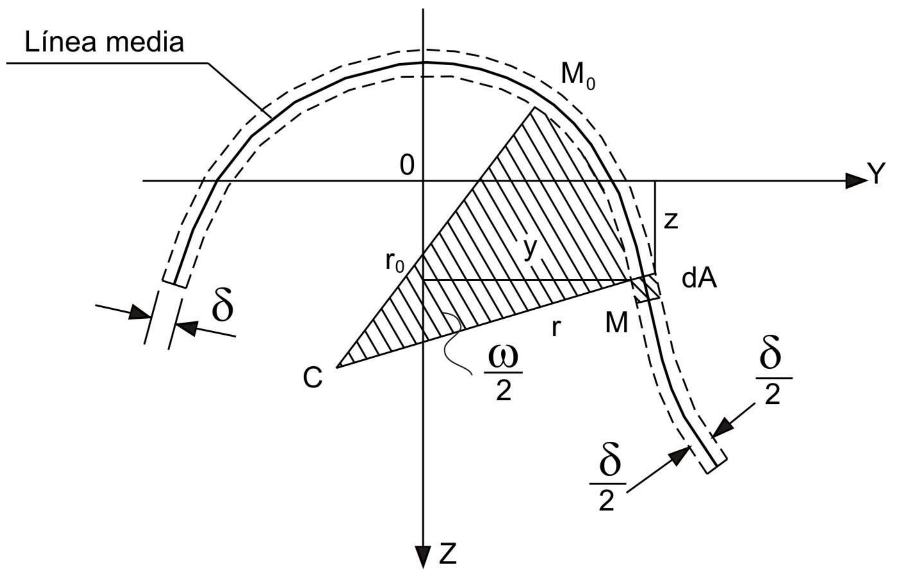


Fig. 8.2

Torsión en la cual la sección transversal presenta resistencia al alabeo libre, se llama *torsión restringida*. La torsión de la barra permite la flexión de diversos elementos en sus planos, surgiendo en estos casos los esfuerzos tangenciales de torsión pura, esfuerzos normales de torsión restringida, los que a su vez permiten la aparición de los esfuerzos tangenciales adicionales.

8.2 CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA SECCION

Las características geométricas son integrales definidas de funciones por todo el área de la sección. Si la sección está compuesta por elementos rectangulares (pequeños rectángulos) de longitud s y ancho δ, entonces su área elemental dA de cualquier elemento se puede expresar en función del producto $\delta.ds$. Entonces, las características conocidas del capítulo "Características geométricas de secciones planas" del curso de Estática, se pueden mostrar en la forma:

AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL (longitud^2):

$$A = \int_A dA = \sum s.\delta \tag{8.1}$$

MOMENTO ESTATICO RESPECTO AL EJE y (longitud^3):

$$S_y = \int_A zdA = \sum \delta \int_0^s zds \tag{8.2}$$

MOMENTO ESTATICO RESPECTO AL EJE z (longitud^3):

$$S_z = \int_A ydA = \sum \delta \int_0^s yds \tag{8.3}$$

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE y (longitud^4):

$$I_y = \int_A z^2 dA = \sum \delta \int_0^s z^2 ds \tag{8.4}$$

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE z (longitud^4):

$$I_z = \int_A y^2 dA = \sum \delta \int_0^s y^2 ds \qquad (8.5)$$

PRODUCTO DE INERCIA RESPECTO A LOS EJES y, z (longitud^4):

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \sum \delta \int_0^s yz ds \qquad (8.6)$$

Aparte de las características geométricas indicadas, para el cálculo de estructuras de paredes delgadas se usan características especiales, relacionadas con la torsión restringida. Las principales son:

MOMENTO ESTATICO SECTORIAL (longitud^4):

$$S_\omega = \int_A \omega dA = \sum \delta \int_0^s \omega ds \qquad (8.7)$$

MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL LINEAL RESPECTO AL EJE y (longitud^5):

$$I_{\omega y} = \int_A \omega z dA = \sum \delta \int_0^s \omega z ds \qquad (8.8)$$

MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL LINEAL RESPECTO AL EJE z (longitud^5):

$$I_{\omega z} = \int_A \omega y dA = \sum \delta \int_0^s \omega y ds \qquad (8.9)$$

MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL (longitud^6):

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \sum \delta \int_0^s \omega^2 ds \qquad (8.10)$$

Para estructuras de pared delgada, sometidas a torsión pura, se utiliza la siguiente característica geométrica:

MOMENTO DE INERCIA DE TORSION PURA (longitud^4):

$$I_t = \frac{1}{3} \sum s\delta^3 \qquad (8.11)$$

En los integrales de las ecuaciones 8.2 – 8.10, se tienen las coordenadas y, z de los puntos del contorno de la sección transversal y la llamada *coordenada sectorial* ω, que viene a ser igual al doble del área del sector M_0CM, formado por el radio-vector inicial r_0, radio-vector r del punto M y la línea media M_0M de la sección transversal (figura 8.2). Consecuentemente, para el punto M se tendrá que $\omega = 2AREA_{(M_0CM)}$.

Las coordenadas lineales y, z son positivas, si están orientadas en el sentido positivo de los ejes coordenados. La coordenada sectorial ω es positiva, si el correspondiente sector formado por el giro del radio-vector alrededor del polo C es en sentido horario.

Las coordenadas lineales y sectoriales, y, consecuentemente, las características geométricas descritas anteriormente, dependen de cuatro parámetros:

- Inicio de cálculo de las magnitudes y, z.
- Orientación de los ejes Y, Z.
- Ubicación del polo C.
- Inicio de cálculo del área sectorial ω.

Estos parámetros pueden ser determinados, si satisfacen las siguientes condiciones:

1. Los ejes Y, Z deben ser centrales, para ello será necesario que:

$$S_y = \int_A z dA = \sum \delta \int_0^s z ds = 0 \tag{8.12}$$

$$S_z = \int_A y dA = \sum \delta \int_0^s y ds = 0 \tag{8.13}$$

Las condiciones 8.12 y 8.13 nos llevan a la determinación del centro de gravedad de la sección:

$$y_C = \frac{S_{Z1}}{A} \tag{8.14}$$

$$z_C = \frac{S_{Y1}}{A} \tag{8.15}$$

Donde.

S_{Y1}, S_{Z1} - momentos estáticos respecto a los ejes de apoyo arbitrariamente elegidos y_1 y z_1.

2. Los ejes Y, Z deben ser ejes principales de inercia, para ello será necesario que:

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \sum \delta \int_0^s yz ds = 0 \tag{8.16}$$

De esta condición se determina la ubicación de los ejes principales de inercia:

$$tg 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_C z_C}}{I_{z_C} - I_{y_C}} \tag{8.17}$$

Donde:

I_{y_C}, I_{z_C}, $I_{y_C z_C}$ - momentos de inercia y producto de inercia respecto a los ejes centrales de inercia.

A la magnitud positiva del ángulo α le corresponde el giro de los ejes principales en el sentido horario.

Los momentos de inercia principales se determinan por las fórmulas:

$$I_y = I_{y_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_C} sen^2 \alpha_0 - I_{y_C z_C} sen 2\alpha_0 \tag{8.18}$$

$$I_z = I_{y_C} sen^2 \alpha_0 + I_{z_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_C z_C} sen 2\alpha_0 \tag{8.19}$$

3. El inicio de cálculo de los radio-vectores (punto C) se eligen de tal manera que:

$$I_{\omega y} = \int_A z\omega dA = \sum \delta \int_0^s z\omega ds = 0 \tag{8.20}$$

$$I_{\omega z} = \int_A y\omega dA = \sum \delta \int_0^s y\omega ds = 0 \tag{8.21}$$

El punto C se llama *centro de flexión* y posee la propiedad, que las fuerzas cortantes que pasan por ella producen flexión de la barra sin torsión.

De las condiciones 8.20 y 8.21, se obtienen las fórmulas para determinar las coordenadas del centro de flexión:

$$\alpha_y = \frac{I_{\omega By}}{I_y} \tag{8.22}$$

$$\alpha_z = -\frac{I_{\omega Bz}}{I_z} \tag{8.23}$$

Donde:

$I_{\omega By}$, $I_{\omega Bz}$ - momentos de inercia sectoriales lineales respecto a los ejes centrales principales de inercia, calculados por las coordenadas sectoriales ω con inicio arbitrario de cálculo del radio-vector (punto B) y el punto cero.

En el sistema de coordenadas, las magnitudes α_y y α_z se cuentan a partir del punto B.

4. El inicio del área sectorial (punto sectorial principal M_0), se determina de la condición:

$$S_\omega = \int_A \omega dA = \sum \delta \int_0^s \omega ds = 0 \tag{8.24}$$

Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$\omega_0 = \frac{S_{\omega'}}{A} \tag{8.25}$$

Donde:

ω_0 - magnitud constante, llamada de "corrección" de la coordenada sectorial ω'.

$S_{\omega'}$ - momento estático sectorial, calculado por la fórmula 8.7 para cualquier inicio de las áreas sectoriales ω' con inicio del radio-vector en el punto C.

Las coordenadas sectoriales, calculadas a partir del punto cero del sector principal, se determinan por la fórmula:

$$\omega = \omega' - \omega_0 \tag{8.26}$$

Las características geométricas de la sección están dadas por las integrales que tienen la forma $\int_A f_i f_k dA = \sum \delta \int_0^s f_i f_k ds$. Si la sección delgada está compuesta por varios elementos rectangulares, entonces el cálculo de los integrales se puede ejecutar por dos métodos: Vereschaguin y Simpson-Kornoujov. Ambos métodos exigen la construcción de los diagramas de las coordenadas y, z y ω; esto es, los gráficos que muestran la ley de variación de estas coordenadas por el contorno de la sección.

1. METODO DE VERESCHAGUIN

La integral tipo $\int_0^s f_i f_k ds$ en el tramo lineal es igual al producto del área A_i del diagrama f_i por la ordenada m_k del diagrama f_k, correspondiente a la posición del centro de gravedad del diagrama f_i (figura 8.3).

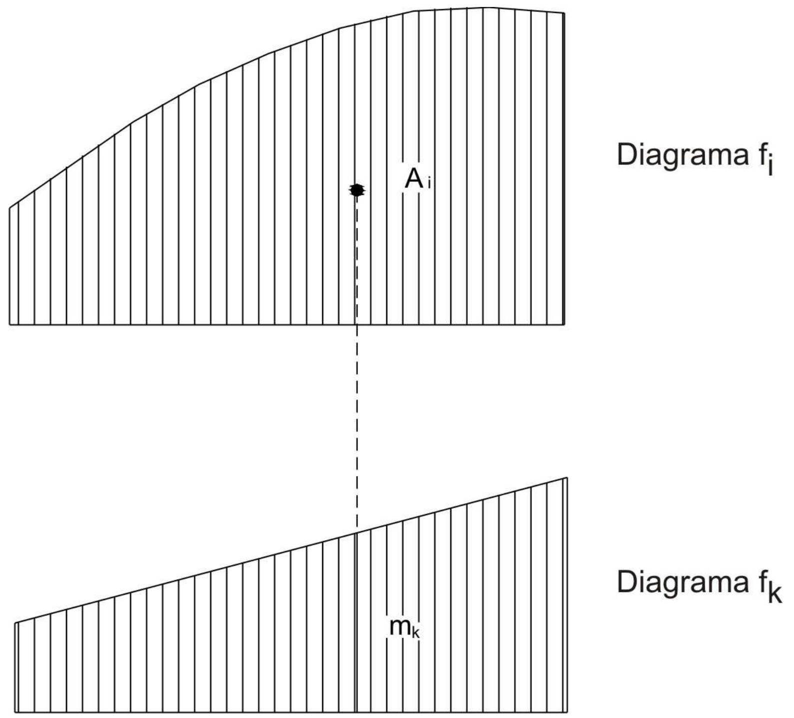


Fig. 8.3

En consecuencia, para toda la sección será:

$$\int_A f_i f_k dA = \sum \delta A_i m_k \qquad (8.27)$$

Para ello, el diagrama f_k debe ser lineal.

2. METODO DE SIMPSON-KORNOUJOV

Este método se usa para el cálculo aproximado de la integral:

$$\int_A f_i f_k dA = \sum \frac{\delta.s}{6}\left(f_{i1}.f_{k1} + 4f_{im}.f_{km} + f_{i2}.f_{k2}\right) \qquad (8.28)$$

Donde:

$f_{i1}, f_{i2}, f_{k1}, f_{k2}$ - ordenadas extremas de los diagramas f_i y f_k.

f_{im}, f_{km} - ordenadas en los centros de los tramos de los diagramas f_i y f_k (figura 8.4).

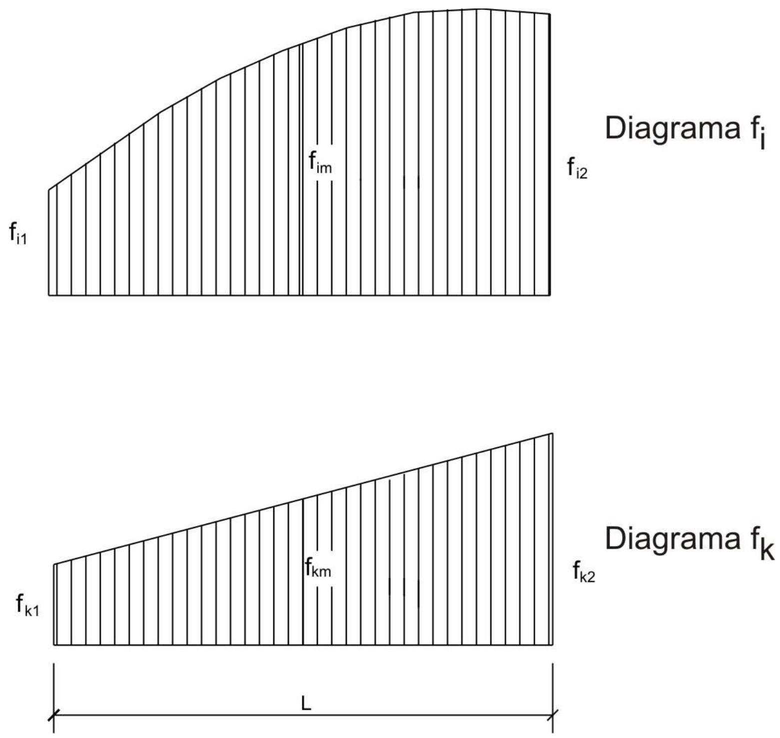


Fig. 8.4

8.3 FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS

Durante la flexión de barras de paredes delgadas, en las secciones transversales surgen las fuerzas internas:

M_y - momento flector respecto al eje y.

M_z - momento flector respecto al eje z.

V_y - fuerza cortante en flexión respecto al eje y.

V_z - fuerza cortante en flexión respecto al eje z.

Los momentos flectores se determinan respecto a los ejes principales de inercia. Las fuerzas cortantes en las direcciones de los mismos ejes y actuantes en el centro de flexión.

En la torsión restringida los esfuerzos normales surgidos que originan sus esfuerzos cortantes y los esfuerzos cortantes de torsión pura, se transforman en las fuerzas internas:

B - bimomento (fuerza.longitud^2).

M_ω - momento flexo-torsor (fuerza.longitud).

M_t - momento de torsión pura (fuerza.longitud).

El *momento torsor total* es igual a la suma de los momentos flexo-torsor y de torsión pura, es decir:

$$L = M_\omega + M_t \qquad (8.29)$$

El estado deformacional de la barra se caracteriza por las magnitudes:

υ_y, υ_z - deflexión en dos planos (longitud).

φ_y, φ_z - ángulo de giro respecto a los ejes y, z (radian).

θ - ángulo retorsor (radian).

θ' - medida de alabeo (radian/longitud).

Las fuerzas internas y desplazamientos debido a la flexión, se determinan como para el caso de barras de sección transversal llena. En la figura 8.5 se muestra una parte de la viga, sometida a la acción de momentos flectores y fuerzas cortantes que poseen signo positivo.

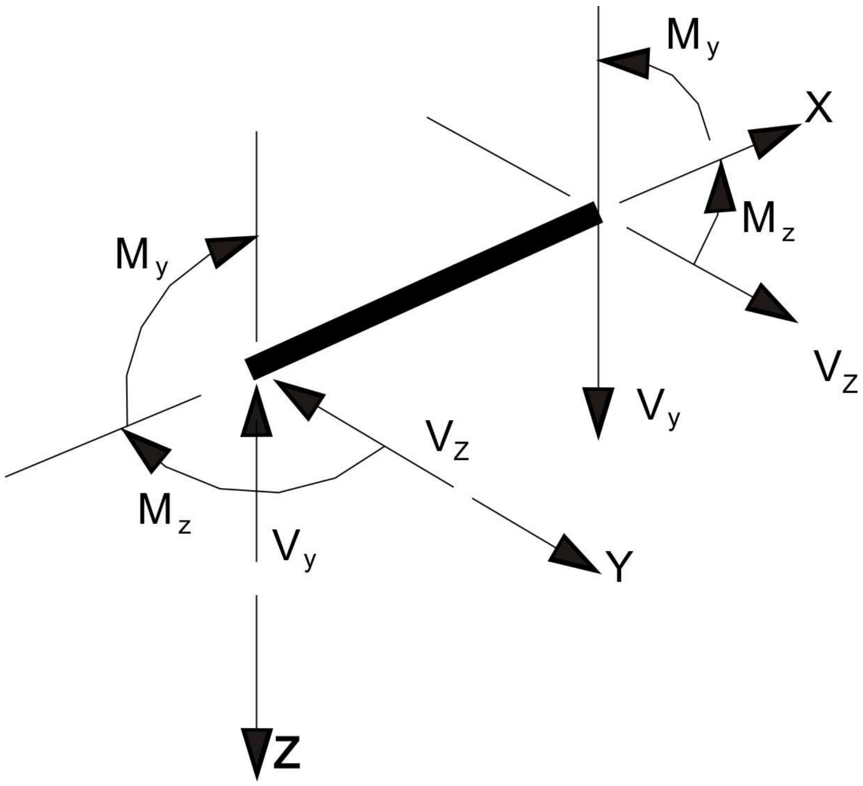


Fig. 8.5

Los factores de deformación y fuerzas, surgidas debido a la torsión de barras, se determinan por las fórmulas del *método de parámetros iniciales:*

ANGULO RETORSOR:

$$\theta_x = \theta_0 + \frac{\theta_0'}{k}\text{shkx} + \frac{B_0}{GI_t}(1 - \text{chkx}) + \frac{L_0}{kGI_t}(\text{kx} - \text{shkx}) + \Delta\theta \qquad (8.30)$$

MEDIDA DE ALABEO:

$$\theta_x' = \theta_0'\text{chkx} - \frac{B_0 k}{GI_t}\text{shkx} + \frac{L_0}{GI_t}(1 - \text{chkx}) + \Delta\theta' \qquad (8.31)$$

BIMOMENTO:

$$B_x = -\frac{GI_t}{k}\theta_0'\text{shkx} + B_0\text{chkx} + \frac{L_0}{k}\text{shkx} + \Delta B \qquad (8.32)$$

MOMENTO TORSOR TOTAL:

$$L_x = L_0 + \Delta L \qquad (8.33)$$

MOMENTO FLEXO-TORSOR:

$$M_{\omega x} = -GI_t\theta_0^{'}chkx + B_0kshkx + L_0chkx + \Delta M_\omega \qquad (8.34)$$

En las fórmulas 8.30 – 8.34, se tiene que:

$\theta_0, \theta_0^{'}, B_0, L_0$ - deformaciones y fuerzas en el extremo izquierdo de la viga (parámetros iniciales).

$\Delta\theta, \Delta\theta^{'}, \Delta B, \Delta L, \Delta M_\omega$ - deformaciones y fuerzas en la sección a una distancia x del extremo izquierdo de la viga debido a las fuerzas de torsión, ubicados a la izquierda de la sección indicada (sin considerar las fuerzas iniciales), las cuales se determinan por las fórmulas 8.35 – 8.40.

$$\Delta\theta = \sum \frac{L^x}{kGI_t}\left[k(x-a) - shk(x-a)\right] + \sum \frac{m}{GI_tk^2}\left[\frac{k^2(x-b)^2}{2} - \frac{k^2(x-c)^2}{2} - chk(x-b) + chk(x-c)\right]$$

………………………………. (8.35)

$$\Delta\theta^{'} = \sum \frac{L^x}{GI_t}\left[1 - chk(x-a)\right] + \sum \frac{m}{GI_tk}\left[k(c-b) - shk(x-b) + shk(x-c)\right]$$

…………………………..….. (8.36)

$$\Delta B = \sum \frac{L^x}{k} shk(x-a) + \sum \frac{m}{k^2}\left[chk(x-b) - chk(x-c)\right] \qquad (8.37)$$

$$\Delta L = \sum L^x + \sum m(x-b) \qquad (8.38)$$

$$\Delta M_\omega = \sum L^x chk(x-a) + \sum \frac{m}{k}\left[shk(x-b) - shk(x-c)\right] \qquad (8.39)$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \qquad (8.40)$$

Donde:

k - característica flexo-torsor (longitud^{-1}).

E, G - módulos de elasticidad del material en tracción y corte.

L^x - momento retorsor puntual (fuerza.longitud).

m - momento torsor uniformemente distribuido (fuerza.longitud/longitud).

a - distancia del extremo izquierdo de la viga hasta el momento puntual.

b, c - distancias del extremo izquierdo de la viga hasta el inicio y final del tramo donde actúa el momento torsor distribuido.

x - distancia del extremo izquierdo de la viga hasta la sección indicada (figura 8.6).

Las cargas en torsión son positivas, si están orientadas en la dirección de la figura 8.6 y serán negativas si están orientadas en sentido opuesto.

Entre las magnitudes θ_x, $\theta_x^{'}$, B_x, $M_{\omega x}$ y M_{tx} existen las siguientes dependencias diferenciales:

$$\frac{d\theta_x}{dx} = \theta'_x \tag{8.41}$$

$$-EI_\omega \frac{d\theta'_x}{dx} = B_x \tag{8.42}$$

$$\frac{dB_x}{dx} = M_{\omega x} \tag{8.43}$$

$$GI_t\theta'_x = M_{tx} \tag{8.44}$$

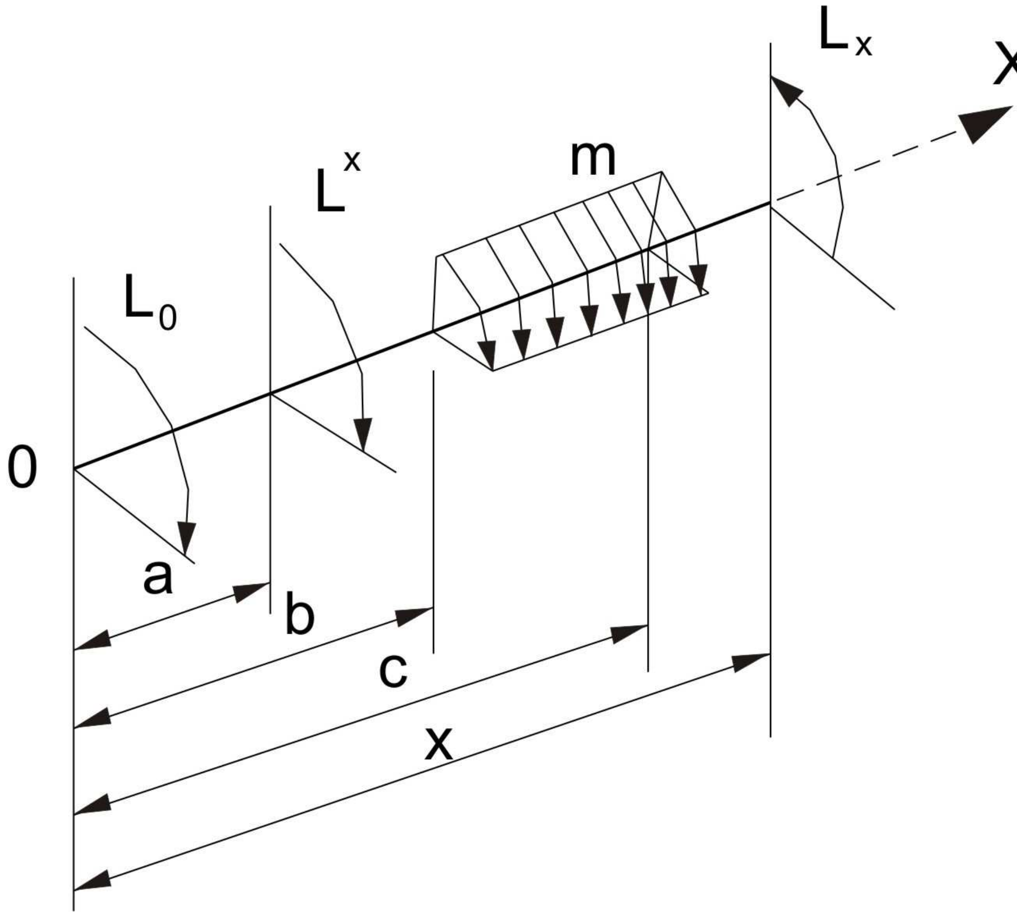


Fig. 8.6

8.4 ESFUERZOS NORMAL Y TANGENCIAL

En general, para el cálculo de barras de paredes delgadas ante cargas de flexión y torsión, los esfuerzos normal y tangencial se determinan por las fórmulas 8.45 – 8.46.

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{B\omega}{I_\omega} \tag{8.45}$$

$$\tau = \frac{V_y S_y}{I_y \delta} + \frac{V_z S_z}{I_z \delta} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} \pm \frac{M_t \delta}{I_t} \tag{8.46}$$

Donde:

S_y, S_z, S_ω - momentos estáticos respecto a los ejes y, z y momento sectorial estático de la parte del área de la sección transversal de la barra, ubicada a un lado del punto en el cual se determina el esfuerzo.

El signo del momento estático depende de la dirección del sentido del contorno de la sección transversal. Si la dirección del sentido del contorno es de derecha a izquierda (o contra las manecillas del reloj) se considera positivo. En otras palabras, si la ordenada del momento estático, por ejemplo, S_y será positivo, si en la parte derecha de la sección mostrada el diagrama z posee signo positivo, y en la parte izquierda de la misma signo negativo. En caso contrario el momento estático S_y será negativo.

El primer miembro de la fórmula 8.45, considera la flexión en el plano XOZ, el segundo miembro en el plano XOY, el último flexo-torsión. Consecuentemente, los diagramas de esfuerzos normales corresponden a la ley de variación de las coordenadas z, y, ω.

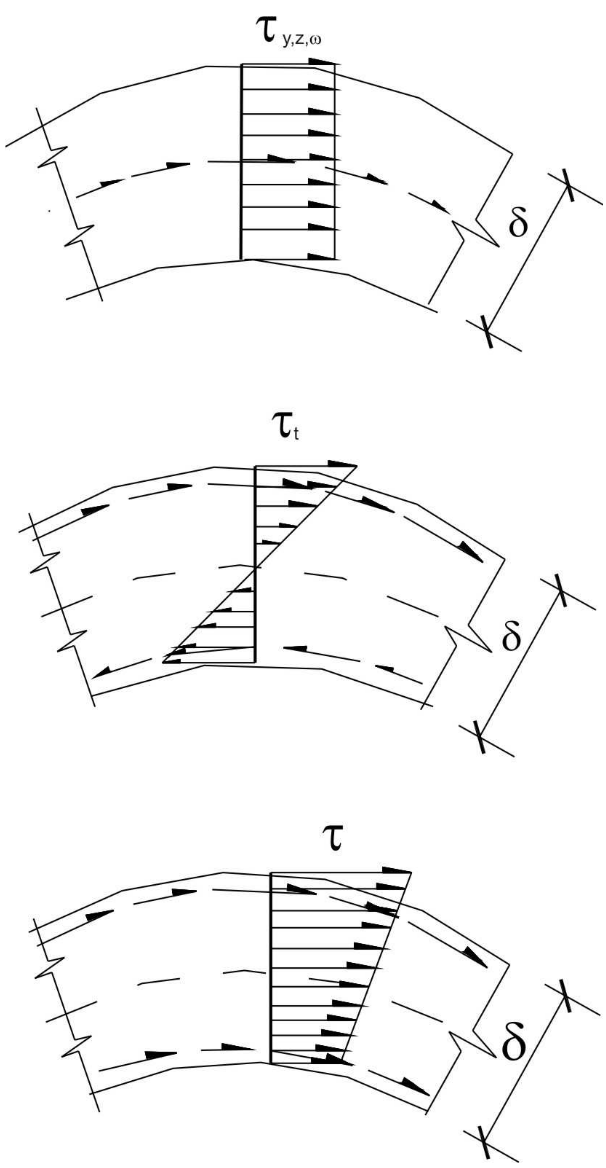


Fig. 8.7

En el intervalo del elemento lineal recto de la sección, el diagrama completo σ posee un carácter lineal y en el intervalo de toda la sección, los esfuerzos normales se consideran uniformemente distribuidos.

Para calcular los esfuerzos normales será necesario considerar los signos en la fórmula 8.45, así como los signos de las fuerzas y coordenadas y, z, ω. Los esfuerzos calculados por la fórmula 8.45 con signo "positivo" se consideran de tracción y los esfuerzos con signo negativo de compresión.

Los esfuerzos tangenciales τ_y, τ_z, τ_ω debido a V_y, V_z, M_ω por el contorno de la sección corresponden a la ley de variación de los momentos estáticos S_y, S_z, S_ω y por el espesor de la sección serán uniformemente distribuidos.

Los esfuerzos tangenciales de torsión pura τ_t varían por el espesor de la pared por la ley del diagrama antisimétrico lineal recto y tienen el valor en los puntos extremos del espesor de la pared, los determinados por el último miembro de la fórmula 8.46. En consecuencia, la suma de diagramas de esfuerzos tangenciales por el espesor de la pared posee un carácter lineal (figura 8.7).

Para el cálculo de los esfuerzos tangenciales se consideran los signos en la fórmula 8.46, los signos de las fuerzas y los momentos estáticos S_y, S_z y S_ω. Por sentido positivo de los esfuerzos tangenciales se toma la dirección positiva del sentido del contorno de la sección, esto es, de derecha a izquierda (o contra las manecillas del reloj).

8.5 CONDICIONES DE BORDE

Independientemente de las cargas y de las condiciones de fijación de la viga, se tienen dos parámetros iniciales conocidos y dos desconocidos (figura 8.8,a). Estos últimos se determinan a partir de las condiciones de borde del extremo derecho de la viga, los cuales pueden tener condiciones análogas de fijación (figura 8.8,b).

Para las condiciones de borde, utilizamos dos de las cuatro fórmulas de los parámetros iniciales 8.30 – 8.33, considerando todos los momentos torsores actuantes en la viga y reemplazando sus valores de las funciones hiperbólicas por las magnitudes de los argumentos igual a k*L* (donde *L* es la longitud de la viga).

Para el caso de vigas con apoyo cilíndrico intermedio, dicho apoyo tiene un momento de reacción L^x, el cual es desconocido y se determina a través de una ecuación adicional tipo fórmula 8.30, la cual es igual a cero y donde se consideran los momentos torsores ubicados a la izquierda del apoyo.

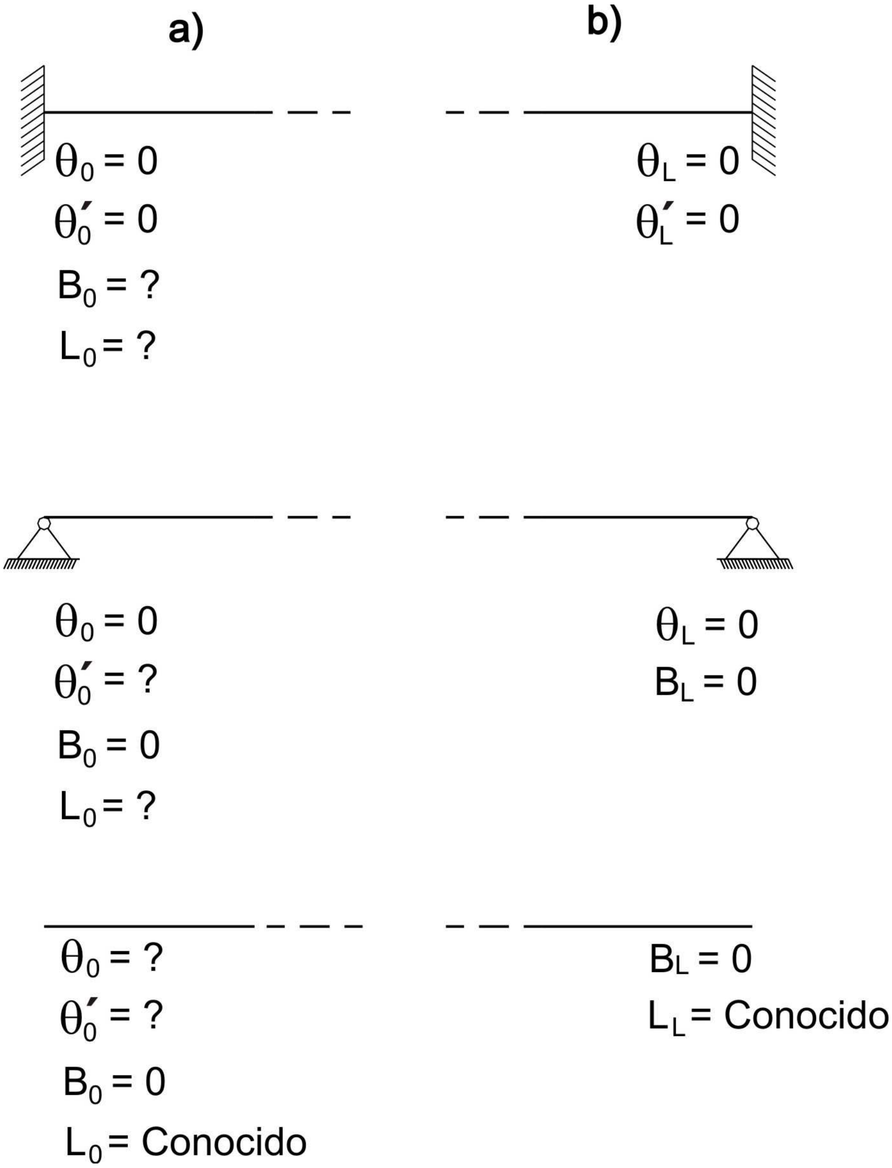


Fig. 8.8

8.6 CALCULO DE VIGA DE PARED DELGADA

Para la viga de la figura 8.9 de sección simétrica (figura 8.10), determinar las características geométricas de la sección, desplazamientos, fuerzas internas y esfuerzos.

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA SECCION

1. Determinamos el área de la sección transversal

$$A = \sum s.\delta = 38.2 + 20.1.2 + 20.0{,}8.2 = 148cm^2$$

2. Elegimos los ejes auxiliares Y_1 y Z_1, graficando el diagrama z_1 (figura 8.11) y determinamos la ordenada z_C del centro de gravedad.

$$z_C = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{\sum \delta.AREA_{z1}}{A} = \frac{(1.20.20.0{,}5 + 0{,}8.20.20).2}{148} = 7{,}03cm$$

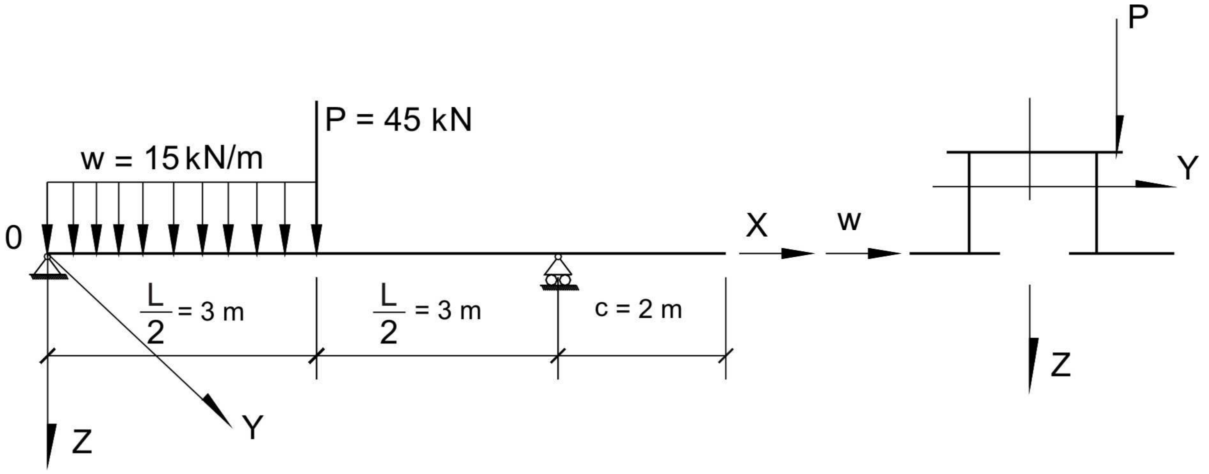


Fig. 8.9

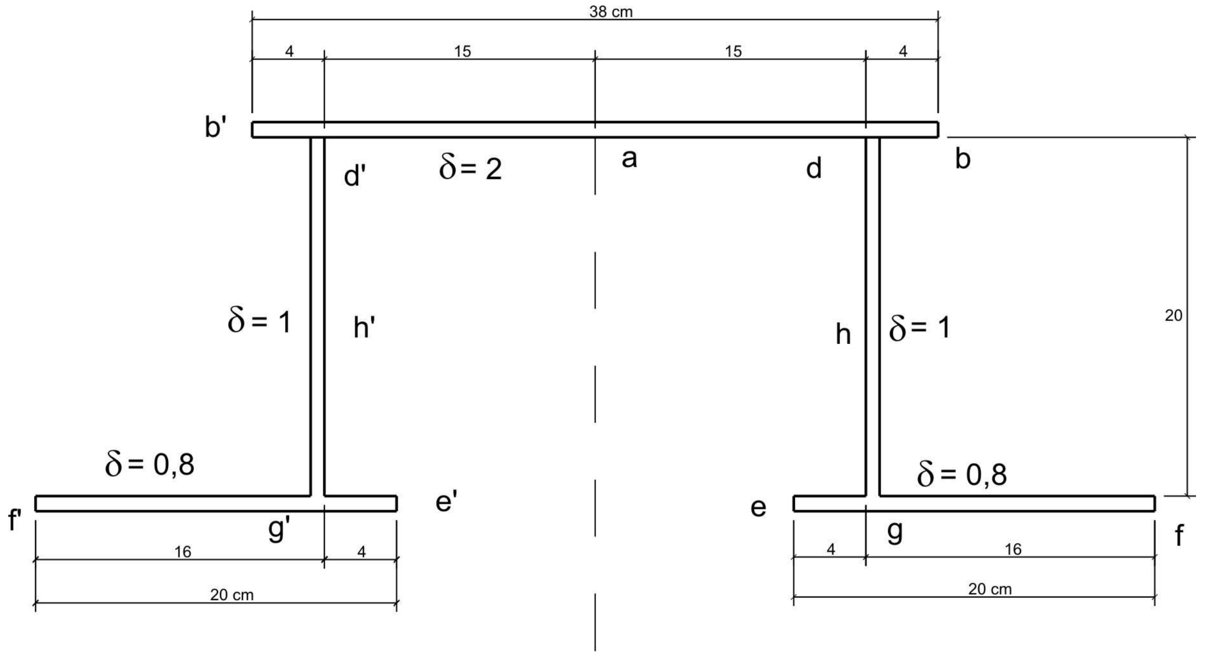


Fig. 8.10

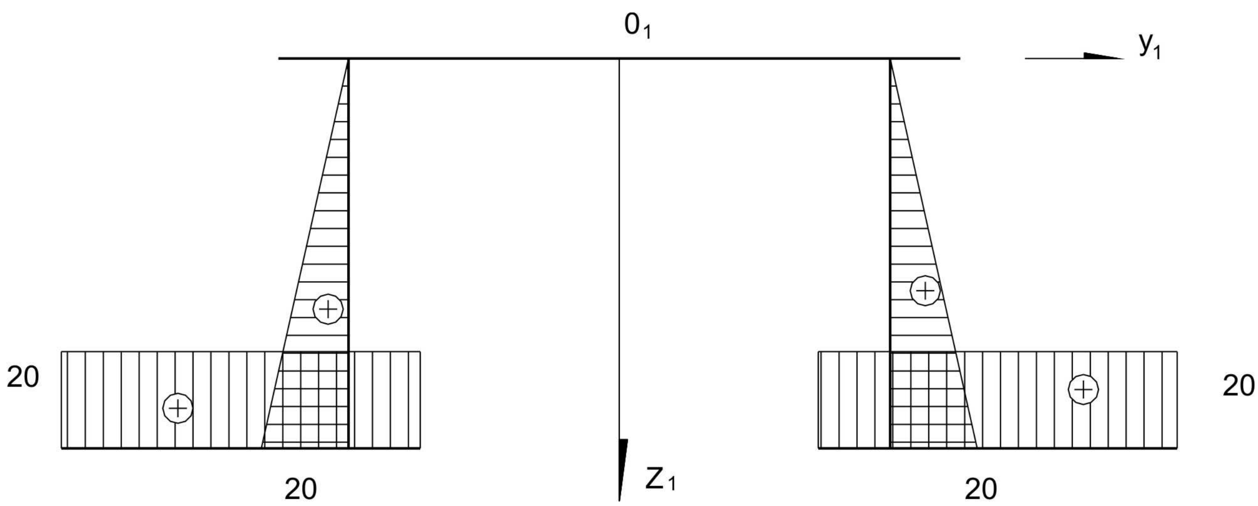


Fig. 8.11 Diagrama z_1 en cm.

Trazamos los ejes centrales Y_C y Z_C (eje Z_C concuerda con el eje Z_1) y graficamos los diagramas y_C y z_C (figuras 8.12 y 8.13).

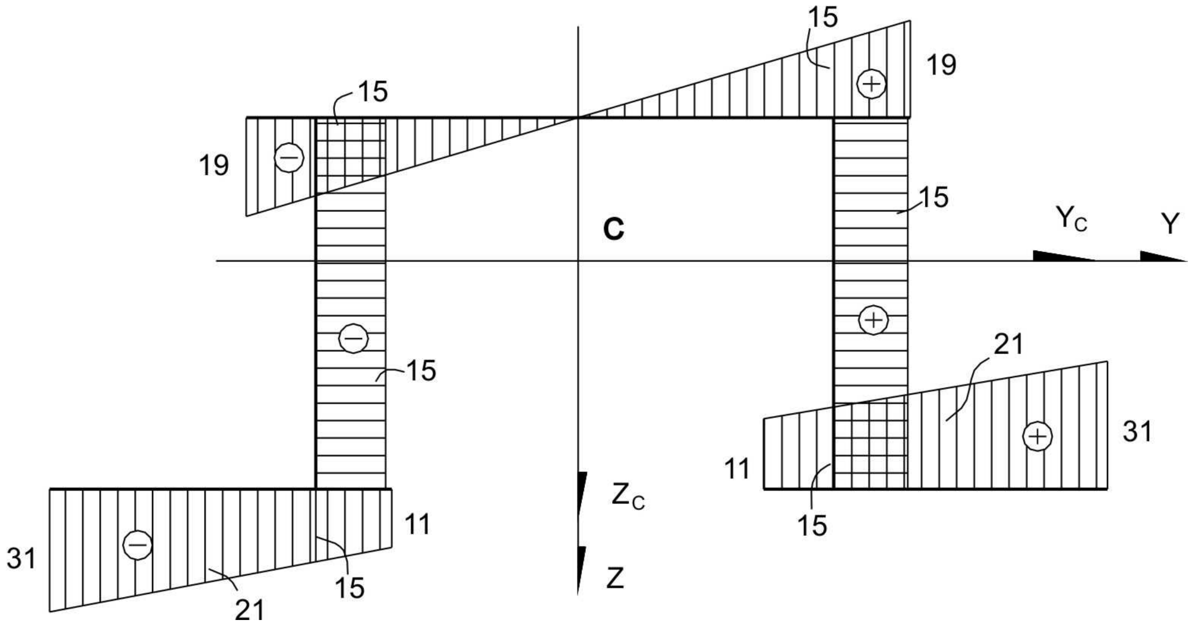


Fig. 8.12 Diagrama y_C (y) en cm.

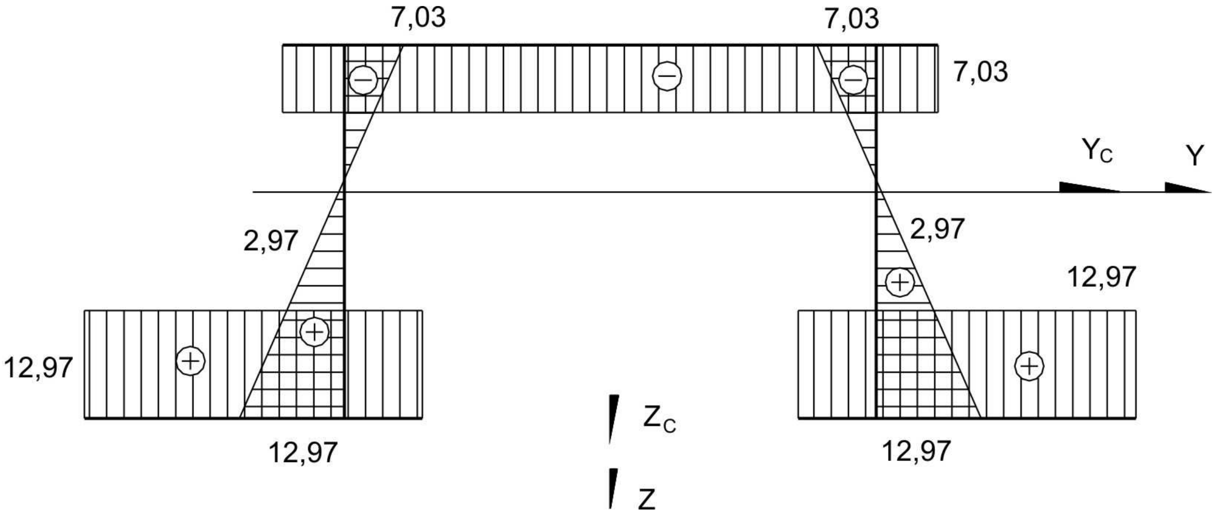


Fig. 8.13 Diagrama z_C (z) en cm.

Comprobamos la veracidad de la determinación del centro de gravedad.

$$S_y = \int_A z_C dA = \sum \delta.AREA_{z_C} = -2.38.7{,}03 + (1.20.2{,}97 + 0{,}8.20.12{,}97).2 = -534{,}28 + 533{,}84$$

$$= -0{,}44\text{cm}^3$$

El error porcentual es:

$$\varepsilon = \frac{0{,}44}{534{,}28}.100\% = 0{,}08\%$$

3. Los ejes Y_C y Z_C son ejes centrales principales de inercia, esquematizados también como Y y Z (figuras 8.12 y 8.13). Determinamos los momentos de inercia principales de la sección.

$$I_y = \int_A z^2 dA = \sum \delta \int_0^s z^2 ds = 7{,}03.38.7{,}03.2 + \left[\frac{20}{6}(7{,}03^2 + 4.2{,}97^2 + 12{,}97^2).1 \right].2 +$$

$$+ 20.12{,}97.12{,}97.0{,}8.2 = 10825{,}23 cm^4$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \sum \delta \int_0^s y^2 ds = 19.19.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.19.2.2 + 20.15.15.1.2 + \frac{20}{6}(31^2 + 4.21^2 + 11^2).0{,}8.2$$

$$= 33324 cm^4$$

4. Elegimos el polo B y el inicio del punto sectorial cero "0" en el eje de simetría, determinando las coordenadas sectoriales para la mitad derecha de la sección. Los puntos principales de la sección se muestran en la figura 8.10.

$$\omega_{Ba} = \omega_{Bd} = \omega_{Bb} = 0$$

$$\omega_{Bg} = 15.20 = 300 cm^2$$

$$\omega_{Be} = 300 + 20.4 = 380 cm^2$$

$$\omega_{Bf} = 300 - 20.16 = -20 cm^2$$

Para la parte izquierda de la sección, las coordenadas sectoriales serán las mismas en magnitud, pero de signo opuesto. Graficamos el diagrama ω_B (figura 8.14) y determinamos los momentos de inercia lineal-sectoriales.

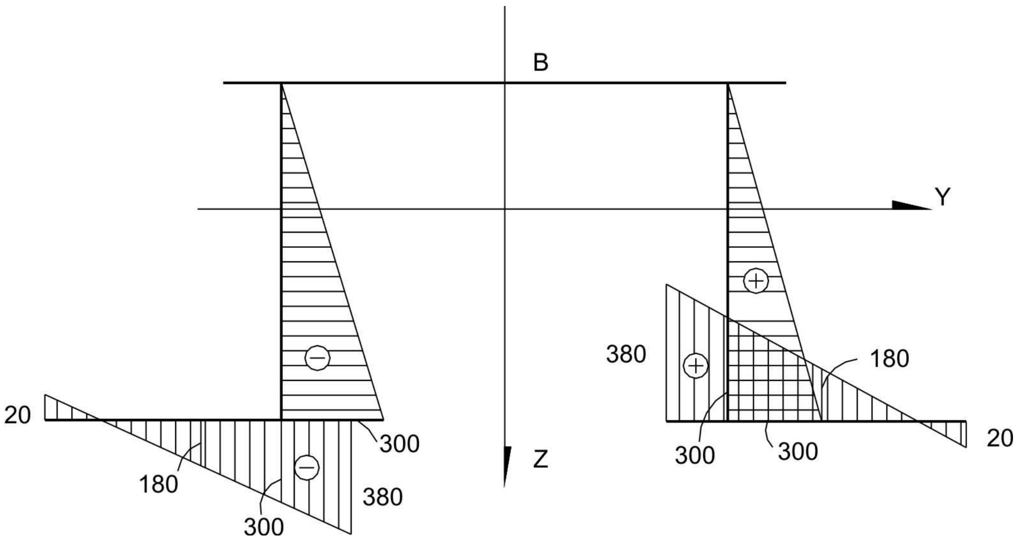


Fig. 8.14 Diagrama ω_B en cm^2

$$I_{\omega By} = \int_A \omega_B z dA = \sum \delta \int_0^s \omega_B z ds = 0$$

$$I_{\omega Bz} = \int_A \omega_B y dA = \sum \delta \int_0^s \omega_B y ds = \left[\frac{300.20}{2}.15.1 + \frac{20}{6}(380.11 + 4.180.21 - 20.31).0,8 \right].2$$

$$= 189626,67 cm^5$$

Calculamos las coordenadas del centro de flexión.

$$\alpha_y = \frac{I_{\omega By}}{I_y} = 0$$

$$\alpha_z = -\frac{I_{\omega Bz}}{I_z} = -\frac{189626,67}{33324} = -5,69 cm$$

Esto quiere decir, que el centro de flexión se encuentra en el eje de simetría (figura 8.15).

5. Como el punto inicial cero "0" se encuentra en el eje de simetría, se denomina punto sectorial principal cero. Calculamos las coordenadas sectoriales ω con polo en el centro de flexión A y graficamos el diagrama ω (figura 8.15).

$$\omega_a = 0$$

$$\omega_d = -5,69.15 = -85,35 cm^2$$

$$\omega_b = -5,69.19 = -108,11 cm^2$$

$$\omega_g = -85,35 + 15.20 = 214,65 cm^2$$

$$\omega_e = 214,65 + 4.25,69 = 317,41 cm^2$$

$$\omega_f = 214,65 - 16.25,69 = -196,39 cm^2$$

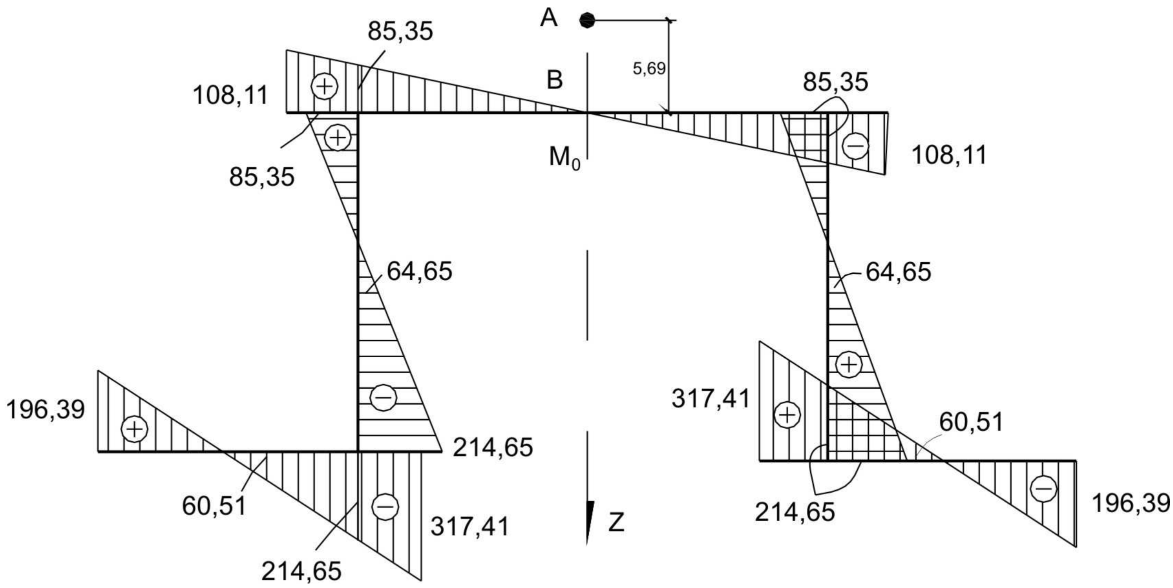


Fig. 8.15 Diagrama ω en cm^2

Ahora comprobamos la correcta determinación de las coordenadas del centro de flexión y el diagrama ω.

$$I_{\omega y} = \int_A \omega z dA = \sum \delta \int_0^s \omega z ds = 0$$

$$I_{\omega z} = \int_A \omega y dA = \sum \delta \int_0^s \omega y ds = \left[\frac{20}{6}(11.317,41 + 4.21.60,51 - 31.196,39).0,8 + 15.20.64,65.1 - \right.$$

$$\left. -19.108,11.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.19.2 \right].2 = 52050,05 - 52036,95 = 13,1 cm^5$$

El error porcentual es:

$$\varepsilon = \frac{13,1}{52050,05}.100\% = 0,025\%$$

6. Calculamos el momento de inercia sectorial principal

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \sum \int_0^s \omega^2 ds = \left[19.108,11.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.108,11.2 + \frac{20}{6}(85,35^2 + 4.64,65^2 + 214,65^2).1 + \right.$$

$$\left. + \frac{20}{6}(317,41^2 + 4.60,51^2 + 196,39^2).0,8 \right].2 = 1584416,4 cm^6$$

7. Calculamos el momento de inercia de torsión pura

$$I_t = \frac{1}{3}\sum s\delta^3 = \frac{1}{3}(19.2^3 + 20.1^3 + 20.0,8^3).2 = 121,49 cm^4$$

8. Considerando la identificación de los puntos de la sección de la figura 8.10, calculamos las ordenadas del diagrama de momento estático S_y, el cual se muestra en la figura 8.16 y es antisimétrico.

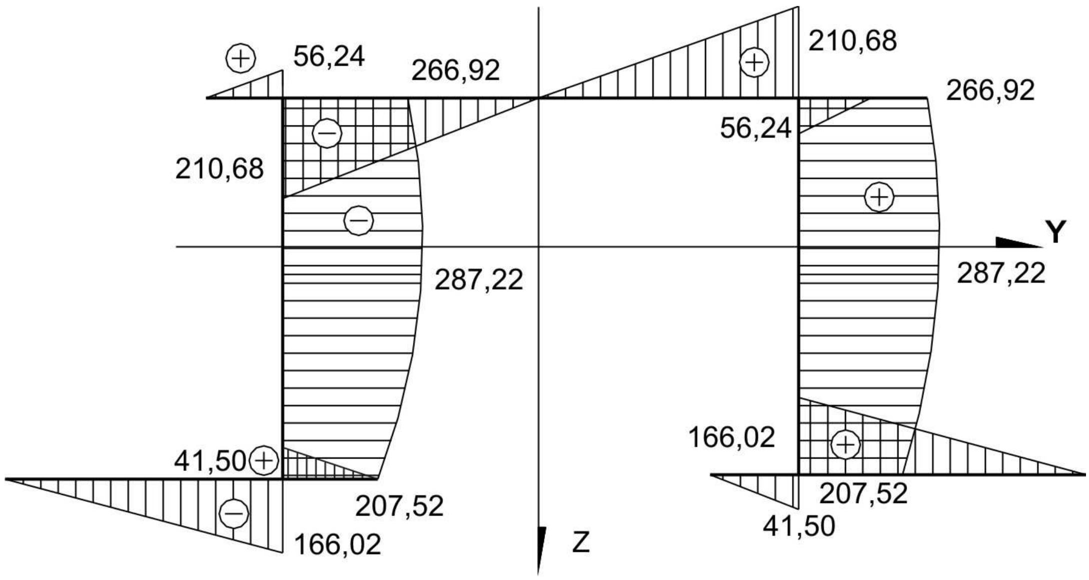


Fig. 8.16 Diagrama S_y en cm³

$$S_{ba} = S_{eg} = S_{fg} = 0$$

$$S_{ge} = -12,97.4.0,8 = -41,50 cm^3$$

$$S_{gf} = 12{,}97.16.0{,}8 = 166{,}02cm^3$$

$$S_{gd} = 41{,}50 + 166{,}02 = 207{,}52cm^3$$

$$S_{hg} = 207{,}52 + \frac{12{,}97 + 2{,}97}{2}.10.1 = 287{,}22cm^3$$

$$S_{dg} = 207{,}52 + 20.2{,}97.1 = 266{,}92cm^3$$

$$S_{db} = -7{,}03.4.2 = -56{,}24cm^3$$

$$S_{da} = 266{,}92 - 56{,}24 = 210{,}68cm^3$$

$$S_{ad} = 210{,}68 - 7{,}03.15.2 = -0{,}22 \approx 0$$

Ahora, calculamos las ordenadas del diagrama de momento estático S_z, el cual es simétrico (figura 8.17).

$$S_{ba} = S_{eg} = S_{fg} = 0$$

$$S_{ge} = -\frac{11+15}{2}.4.0{,}8 = -41{,}6cm^3$$

$$S_{gf} = \frac{15+31}{2}.16.0{,}8 = 294{,}4cm^3$$

$$S_{gd} = 41{,}6 + 294{,}4 = 336cm^3$$

$$S_{hg} = 336 + 15.10.1 = 486cm^3$$

$$S_{dg} = 486 + 15.10.1 = 636cm^3$$

$$S_{db} = \frac{15+19}{2}.4.2 = 136cm^3$$

$$S_{da} = 636 + 136 = 772cm^3$$

$$S_{ad} = 772 + \frac{15.15}{2} = 884{,}5cm^3$$

Las ordenadas del diagrama del momento estático sectorial S_ω serán las mostradas en la figura 8.18, el cual también es simétrico.

$$S_{ba} = S_{eg} = S_{fg} = 0$$

$$S_{ge} = -\frac{317{,}41 + 214{,}65}{2}.4.0{,}8 = -851{,}30cm^4$$

$$S_{gf} = \frac{214{,}65 - 196{,}39}{2}.16.0{,}8 = 116{,}86cm^4$$

$$S_{gd} = 851{,}30 + 116{,}86 = 968{,}16cm^4$$

$$S_{hg} = 968{,}16 + \frac{214{,}65 + 64{,}65}{2}.10.1 = 2364{,}66cm^4$$

$$S_{dg} = 968,16 + 64,65.20.1 = 2261,16 cm^4$$

$$S_{db} = -\frac{108,11 + 85,35}{2}.4.2 = -773,84 cm^4$$

$$S_{da} = 2261,16 - 773,84 = 1487,32 cm^4$$

$$S_{ad} = 1487,32 - \frac{85,35.15}{2}.2 = 207,07 cm^4$$

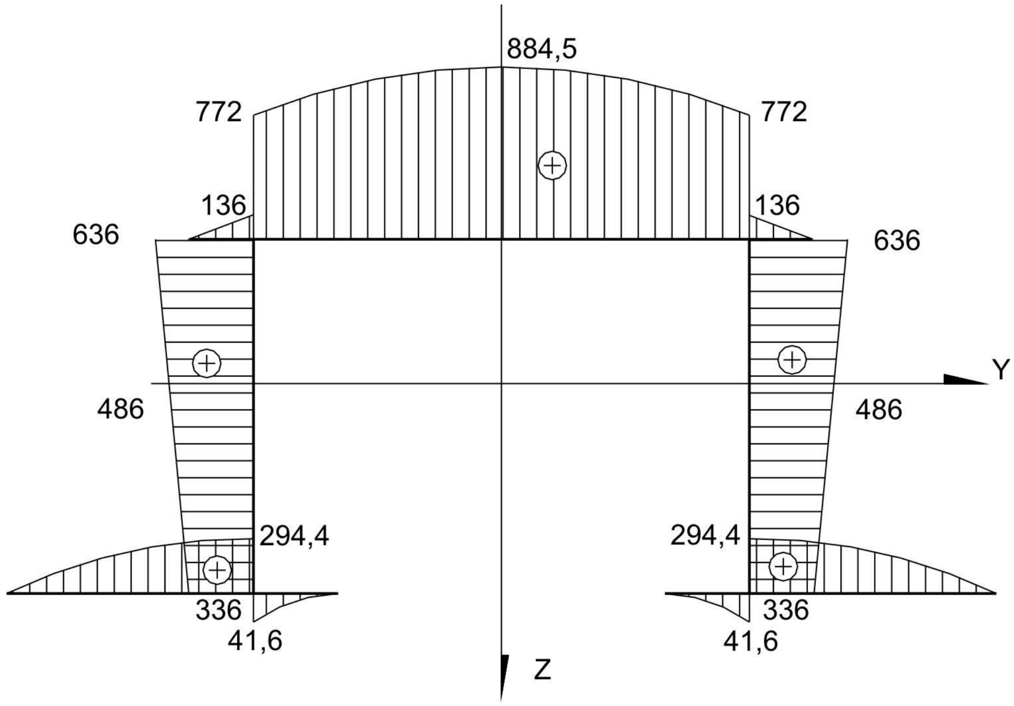


Fig. 8.17 Diagrama S_z en cm^3

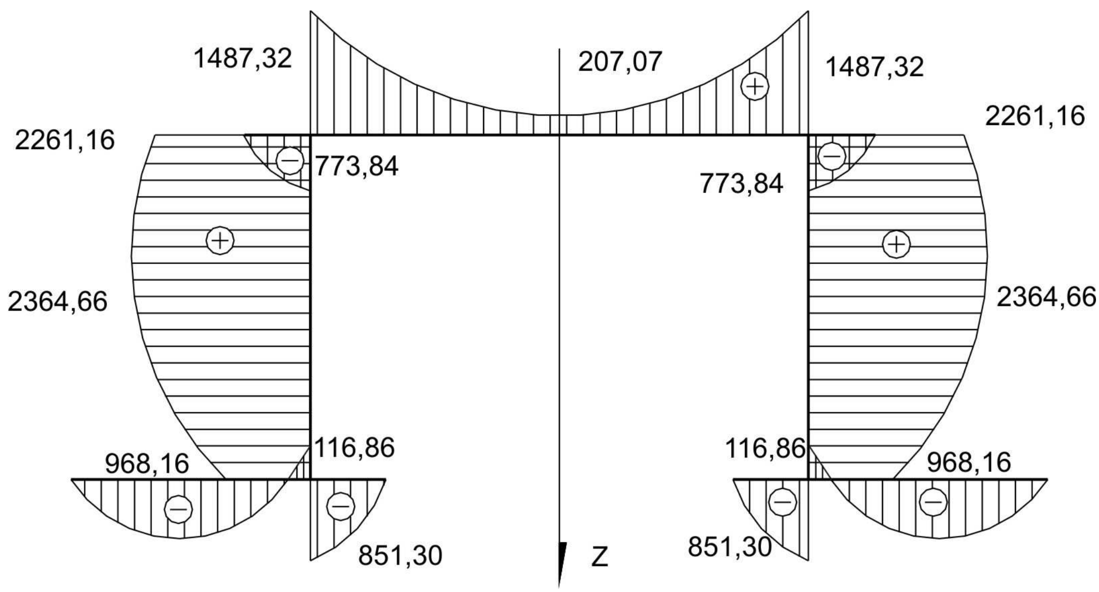


Fig. 8.18 Diagrama S_ω en cm^4

FUERZAS INTERNAS Y DESPLAZAMIENTOS

1. Graficamos el diagrama de momento flector en el plano vertical, esto es XOZ (figura 8.19) y en el plano horizontal, esto es XOY (figura 8.20).

   Determinamos las cargas de torsión:

   $$L^x = Pe_p = 45.0{,}19 = 8{,}55kN.m$$

   $$m = -we_w = -15.0{,}2569 = -3{,}8535kN.m/m$$

2. Calculamos la rigidez flexo-torsor (EI_ω) y la rigidez en torsión pura (GI_t).

   $$EI_\omega = 2.10^8.1584416{,}4.10^{-12} = 316{,}8833kN.m^4$$

   $$GI_t = 0{,}4.2.10^8.121{,}49.10^{-8} = 97{,}192kN.m^2$$

   A partir de estos resultados, determinamos la característica flexo-torsor.

   $$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{97{,}192}{316{,}8833}} = 0{,}5538m^{-1}$$

Tabla 8.1

Funciones hiperbólicas

Nº de punto	x	$x-3$	$x-6$	kx	$k(x-3)$	$k(x-6)$
0	0	-	-	0,0000	-	-
1	1	-	-	0,5538	-	-
2	2	-	-	1,1076	-	-
3	3	0	-	1,6614	0,0000	-
4	4	1	-	2,2152	0,5538	-
5	5	2	-	2,7690	1,1076	-
6	6	3	0	3,3228	1,6614	0,0000
7	7	4	1	3,8766	2,2152	0,5538
8	8	5	2	4,4304	2,7690	1,1076

Nº de punto	$shkx$	$chkx$	$shk(x-3)$	$chk(x-3)$	$shk(x-6)$	$chk(x-6)$
0	0,0000	1,0000	-	-	-	-
1	0,5825	1,1573	-	-	-	-
2	1,3484	1,6787	-	-	-	-
3	2,5384	2,7283	0,0000	1,0000	-	-
4	4,5271	4,6362	0,5825	1,1573	-	-
5	7,9400	8,0027	1,3484	1,6787	-	-
6	13,8509	13,8870	2,5384	2,7283	0,0000	1,0000
7	24,1196	24,1403	4,5271	4,6362	0,5825	1,1573
8	41,9765	41,9885	7,9400	8,0027	1,3484	1,6787

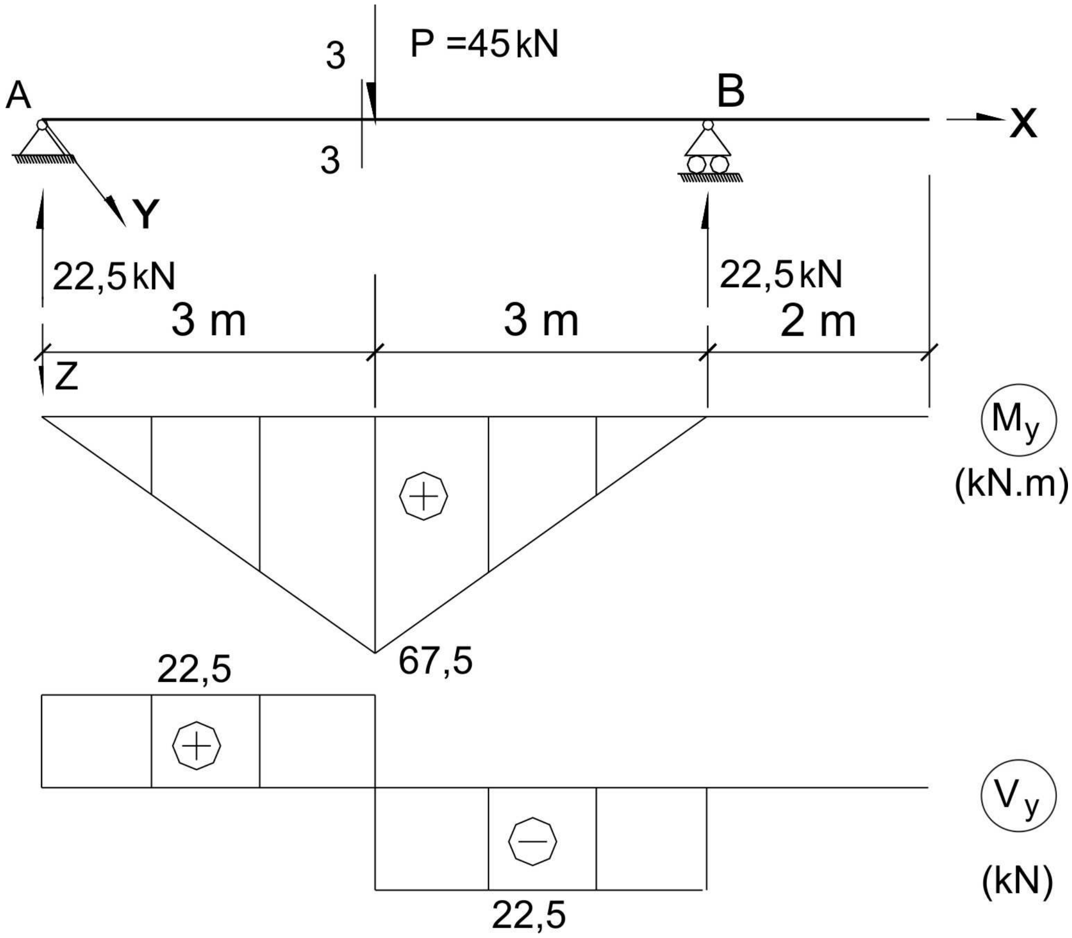


Fig. 8.19

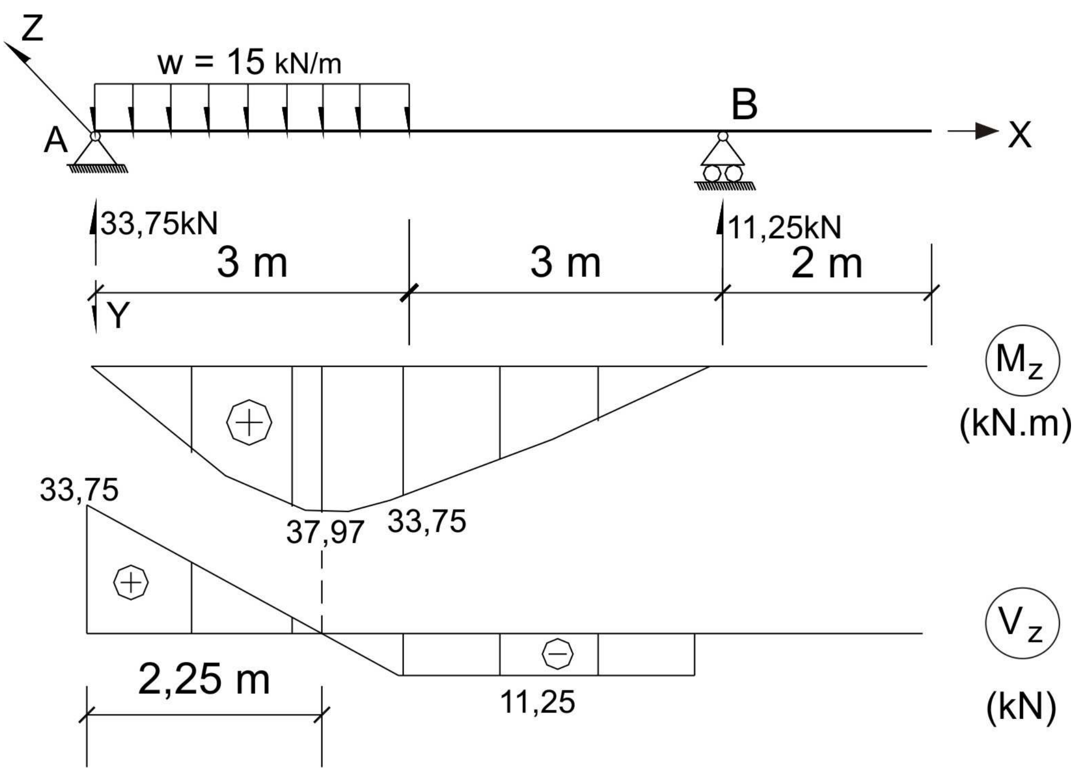


Fig. 8.20

3. Dividimos la longitud de la viga en 8 partes iguales (figura 8.21) y escribimos para todos los puntos los valores de x, $x-3$, $x-6$, kx, $k(x-3)$, $k(x-6)$ y las funciones hiperbólicas (tabla 8.1).

Determinamos los parámetros iniciales para el cálculo de vigas en torsión. En el extremo izquierdo de la viga se tendrá $\theta_0 = 0$, $B_0 = 0$ y son desconocidos $\theta_0^{'}$ y L_0. También es desconocido el momento torsor puntual L_B^x en el apoyo derecho.

Los parámetros desconocidos pueden ser determinados a partir de las condiciones de borde:

a) Si $x = 8m \quad \Rightarrow \quad B = 0$

b) Si $6m < x \leq 8m \quad \Rightarrow \quad L = 0$

c) Si $x = 6m \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$

Analizamos la condición "a", utilizando las fórmulas del método de parámetros iniciales para el bimomento.

$$-\frac{GI_t}{k}\theta_0^{'}sh8k + \frac{L_0}{k}sh8k + \frac{L^x}{k}sh5k + \frac{L_B^x}{k}sh2k + \frac{m}{k^2}(ch8k - ch5k) = 0$$

$$-\frac{97,192}{0,5538}.\theta_0^{'}.41,9765 + \frac{L_0}{0,5538}.41,9765 + \frac{8,55}{0,5538}.7,9400 + \frac{L_B^x}{0,5538}.1,3484 -$$

$$-\frac{3,8535}{0,5538^2}(41,9885 - 8,0027) = 0$$

De donde:

$$7366,88833\theta_0^{'} - 75,7972L_0 - 2,4348L_B^x + 304,4348 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Luego, analizamos la condición "b", utilizando las fórmulas para el momento torsor total.

$$L_0 + L^x + L_B^x + m(3-0) = 0$$

$$L_0 + 8,55 + L_B^x - 3,8535.3 = 0$$

$$L_0 + L_B^x - 3,0105 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Posteriormente, analizamos la condición "c", utilizando las fórmulas del método de parámetros iniciales para el ángulo retorsor.

$$\frac{\theta_0^{'}}{k}sh6k + \frac{L_0}{kGI_t}(6k - sh6k) + \frac{L^x}{kGI_t}(3k - sh3k) + \frac{m}{GI_tk^2}\left(\frac{6^2k^2}{2} - \frac{3^2k^2}{2} - ch6k + ch3k\right) = 0$$

$$\frac{\theta_0^{'}}{0,5538}.13,8509 + \frac{L_0}{0,5538.97,192}(3,3228 - 13,8509) + \frac{8,55}{0,5538.97,192}(1,6614 - 2,5384) -$$

$$-\frac{3,8535}{97,192.0,5538^2}\left(\frac{36.0,5538^2}{2} - \frac{9.0,5538^2}{2} - 13,8870 + 2,7283\right) = 0$$

De donde:

$$25,01107\theta_0^{'} - 0,1956L_0 + 0,7680 = 0 \qquad \text{(c)}$$

Finalmente, resolvemos el sistema de ecuaciones (a), (b) y (c), obteniendo:

$$\theta_0' = 0{,}004497 rad/m$$

$$L_0 = 4{,}5014 kN.m$$

$$L_B^x = -1{,}4909 kN.m$$

Comprobamos la veracidad de los resultados obtenidos, reemplazando en las ecuaciones (a), (b) y (c).

ECUACION (a):

$$7366{,}8833.0{,}004497 - 75{,}7972.4{,}5014 - 2{,}4348.(-1{,}4909) + 304{,}4348 \approx 0$$

ECUACION (b):

$$4{,}5014 - 1{,}4909 - 3{,}0105 = 0$$

ECUACION (c):

$$25{,}0107.0{,}004497 - 0{,}1956.4{,}5014 + 0{,}7680 \approx 0$$

4. Calculamos los valores del ángulo retorsor (tabla 8.2) y graficamos el diagrama θ_x (figura 8.21).

$$\theta_x = \frac{\theta_0'}{k} shkx + \frac{L_0}{kGI_t}(kx - shkx) + \frac{m}{GI_t k^2}\left[\frac{k^2x^2}{2} - \frac{k^2(x-c)^2}{2} - chkx + chk(x-c)\right] +$$

$$+ \frac{L^x}{kGI_t}[k(x-a) - shk(x-a)] + \frac{L_B^x}{kGI_t}[k(x-a_B) - shk(x-a_B)]$$

$$\theta_x = \frac{0{,}004497}{0{,}5538} shkx + \frac{4{,}5014}{0{,}5538.97{,}192}(kx - shkx) + \frac{8{,}55}{0{,}5538.97{,}192}[k(x-3) - shk(x-3)] -$$

$$- \frac{1{,}4909}{0{,}5538.97{,}192}[k(x-6) - shk(x-6)] - \frac{3{,}8535}{0{,}5538^2.97{,}192}\left[\frac{k^2x^2}{2} - \frac{k^2(x-3)^2}{2} - chkx + chk(x-3)\right]$$

Tabla 8.2

Nº de punto	0,0081203 $shkx$	0,0836304 $(kx - shkx)$	-0,1292763 $\left[\frac{k^2x^2}{2} - \frac{k^2(x-3)^2}{2} - chkx + chk(x-3)\right]$	0,1588483 $[k(x-3) - shk(x-3)]$	-0,0276991 $[k(x-6) - shk(x-6)]$	θ_x (rad)
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	-	-	0,000000
1	0,0047301	-0,0024002	0,0005110	-	-	0,002841
2	0,0109494	-0,0201382	0,0084432	-	-	-0,000746
3	0,0206126	-0,0733439	0,0450108	0,0000000	-	-0,007721
4	0,0367614	-0,1933451	0,1523769	-0,0045589	-	-0,008766
5	0,0644752	-0,4324528	0,4012359	-0,0382507	-	-0,004992
6	0,1124735	-0,8804692	0,9073031	-0,1393099	0,0000000	0,000000
7	0,1958584	-1,6929302	1,8672206	-0,3672414	0,0007950	0,003702
8	0,3408618	-3,1399954	3,6204162	-0,8214046	0,0066699	0,006548

5. Luego, determinamos los valores de la medida de alabeo (tabla 8.3), graficando el diagrama θ'_x (figura 8.21).

$$\theta'_x = \theta'_0 \text{chkx} + \frac{L_0}{GI_t}(1-\text{chkx}) + \frac{m}{GI_t k}\left[kc - \text{shkx} + \text{shk}(x-c)\right] + \frac{L^x}{GI_t}\left[1-\text{chk}(x-a)\right] +$$

$$+\frac{L_B^x}{GI_t}\left[1-\text{chk}(x-a_B)\right]$$

$$\theta'_x = 0{,}004497\text{chkx} + \frac{4{,}5014}{97{,}192}(1-\text{chkx}) - \frac{3{,}8535}{97{,}192.0{,}5538}\left[0{,}5538.3 - \text{shkx} + \text{shk}(x-3)\right] +$$

$$+\frac{8{,}55}{97{,}192}\left[1-\text{chk}(x-3)\right] - \frac{1{,}4909}{97{,}192}\left[1-\text{chk}(x-6)\right]$$

Tabla 8.3

Nº de punto	0,0044970 chkx	0,0463145 $(1-\text{chkx})$	-0,0715932 $[3k - \text{shkx} + \text{shk}(x-3)]$	0,0879702 $[1-\text{chk}(x-3)]$	-0,0153397 $[1-\text{chk}(x-6)]$	θ'_x (rad/m)
0	0,0044970	0,0000000	0,0000000	-	-	0,004497
1	0,0052044	-0,0072853	0,0020547	-	-	-0,000026
2	0,0075491	-0,0314336	0,0172396	-	-	-0,006645
3	0,0122692	-0,0800453	0,0627872	0,0000000	-	-0,004989
4	0,0208490	-0,1684088	0,1634616	-0,0138377	-	0,002064
5	0,0359881	-0,3243265	0,3529688	-0,0597054	-	0,004925
6	0,0624498	-0,5968550	0,6909531	-0,1520389	0,0000000	0,004509
7	0,1085589	-1,0717314	1,2837448	-0,3198772	0,0024129	0,003108
8	0,1888223	-1,8983619	2,3178370	-0,6160289	0,0104110	0,002679

6. Posteriormente, calculamos los valores del bimomento (tabla 8.4) y graficamos el diagrama B_x (figura 8.21).

$$B_x = -\frac{GI_t}{k}\theta'_0 \text{shkx} + \frac{L_0}{k}\text{shkx} + \frac{m}{k^2}\left[\text{chkx} - \text{chk}(x-c)\right] + \frac{L^x}{k}\text{shk}(x-a) + \frac{L_B^x}{k}\text{shk}(x-a_B)$$

$$B_x = -\frac{97{,}192.0{,}004497}{0{,}5538}\text{shkx} + \frac{4{,}5014}{0{,}5538}\text{shkx} - \frac{3{,}8535}{0{,}5538^2}\left[\text{chkx} - \text{chk}(x-3)\right] +$$

$$+\frac{8{,}55}{0{,}5538}\text{shk}(x-3) - \frac{1{,}4909}{0{,}5538}\text{shk}(x-6)$$

Tabla 8.4

Nº de punto	-0,789224 shkx	8,128205 shkx	-12,564623 $[\text{chkx} - \text{chk}(x-3)]$	15,438787 $\text{shk}(x-3)$	-2,692127 $\text{shk}(x-6)$	B_x (kN.m²)
0	0,000000	0,000000	0,000000	-	-	0,000000
1	-0,459723	4,734679	-1,976415	-	-	2,298541
2	-1,064190	10,960072	-8,527610	-	-	1,368272
3	-2,003366	20,632636	-21,715438	0,000000	-	-3,086168
4	-3,572896	36,797197	-43,711067	8,993093	-	-1,493673
5	-6,266439	64,537948	-79,458676	20,817660	-	-0,369507
6	-10,931463	112,582955	-140,204859	39,189817	0,000000	0,636450
7	-19,035767	196,049053	-245,061664	69,892933	-1,568164	0,276391
8	-33,128861	341,193597	-427,018764	122,583969	-3,630064	0,000000

7. Determinamos los valores del momento flexo-torsor (tabla 8.5) y graficamos el diagrama $M_{\omega x}$ (figura 8.21).

$$M_{\omega x} = -GI_t\theta_0^{'}\text{chkx} + L_0\text{chkx} + \frac{m}{k}[\text{shkx} - \text{shk}(x-c)] + L^x\text{chk}(x-a) + L_B^x\text{chk}(x-a_B)$$

$$M_{\omega x} = -97{,}192.0{,}004497.\text{chkx} + 4{,}5014\text{chkx} - \frac{3{,}8535}{0{,}5538}[\text{shkx} - \text{shk}(x-3)] + 8{,}55\text{chk}(x-3) -$$
$$-1{,}4909\text{chk}(x-6)$$

Tabla 8.5

Nº de punto	-0,437072 chkx	4,5014 chkx	-6,958288 $[\text{shkx} - \text{shk}(x-3)]$	8,55 $\text{chk}(x-3)$	-1,4909 $\text{chk}(x-6)$	$M_{\omega x}$ (kN.m)
0	-0,437072	4,501400	0,000000	-	-	4,064328
1	-0,505823	5,209470	-4,053203	-	-	0,650444
2	-0,733713	7,556500	-9,382556	-	-	-2,559769
3	-1,192464	12,281170	-17,662918	8,550000	-	-6,574212 1,975788
4	-2,026353	20,869391	-27,447663	9,894915	-	1,290290
5	-3,497756	36,023354	-45,866251	14,352885	-	1,012232
6	-6,069619	62,510942	-78,715633	23,326965	-1,490900	1,052655 -0,438245
7	-10,551049	108,665146	-136,330258	39,639510	-1,725419	-0,302070
8	-18,351998	189,008034	-236,835770	68,423085	-2,502774	-0,259423

8. Calculamos el momento torsor total (tabla 8.6), graficando su diagrama L_x (figura 8.21).

$$L_x = L_0 + mx + L^x + L_B^x = 4{,}5014 - 3{,}8535x + 8{,}55 - 1{,}4909$$

Tabla 8.6

Nº de punto	$-3{,}8535x$	L_x	$-M_{\omega x}$	$M_{tx} = L_x - M_{\omega x}$	Comprobación $M_{tx} = GI_t\theta_x^{'}$
0	0,000000	4,501400	-4,064328	0,437072	0,437072
1	-3,853500	0,647900	-0,650444	-0,002544	-0,002527
2	-7,707000	-3,205600	2,559769	-0,645831	-0,645841
3	-11,560500	-7,059100 1,490900	6,574212 -1,975788	-0,484888	-0,484891
4	-	1,490900	-1,290290	0,200610	0,200604
5	-	1,490900	-1,012232	0,478668	0,478671
6	-	1,490900 0,000000	-1,052655 0,438245	0,438245	0,438239
7	-	0,000000	0,302070	0,302070	0,302073
8	-	0,000000	0,259423	0,259423	0,260377

9. Luego, determinamos los valores del momento de torsión pura $M_{tx} = L_x - M_{\omega x}$ y realizamos la comprobación respectiva, es decir $M_{tx} = GI_t\theta_x^{'} = 97{,}192\theta_x^{'}$ (tabla 8.6). Como se podrá apreciar, existe una correlación directa entre los resultados obtenidos analíticamente, con los de la comprobación.

10. Finalmente, graficamos los diagramas θ_x, $\theta_x^{'}$, B_x, $M_{\omega x}$, M_{tx} y L_x, los cuales se muestran en la figura 8.21.

ESFUERZO NORMAL Y TANGENCIAL

1. Determinamos los esfuerzos normales en la sección 3 – 3, ubicado a una distancia de 3m del apoyo izquierdo (figura 8.19). Las fuerzas internas en esta sección tienen los siguientes valores:

$$M_y = 67{,}5kN.m\,; \qquad M_z = 33{,}75kN.m\,; \qquad B = -3{,}086168kN.m^2$$

Reemplazamos los valores necesarios en la fórmula de esfuerzos normales:

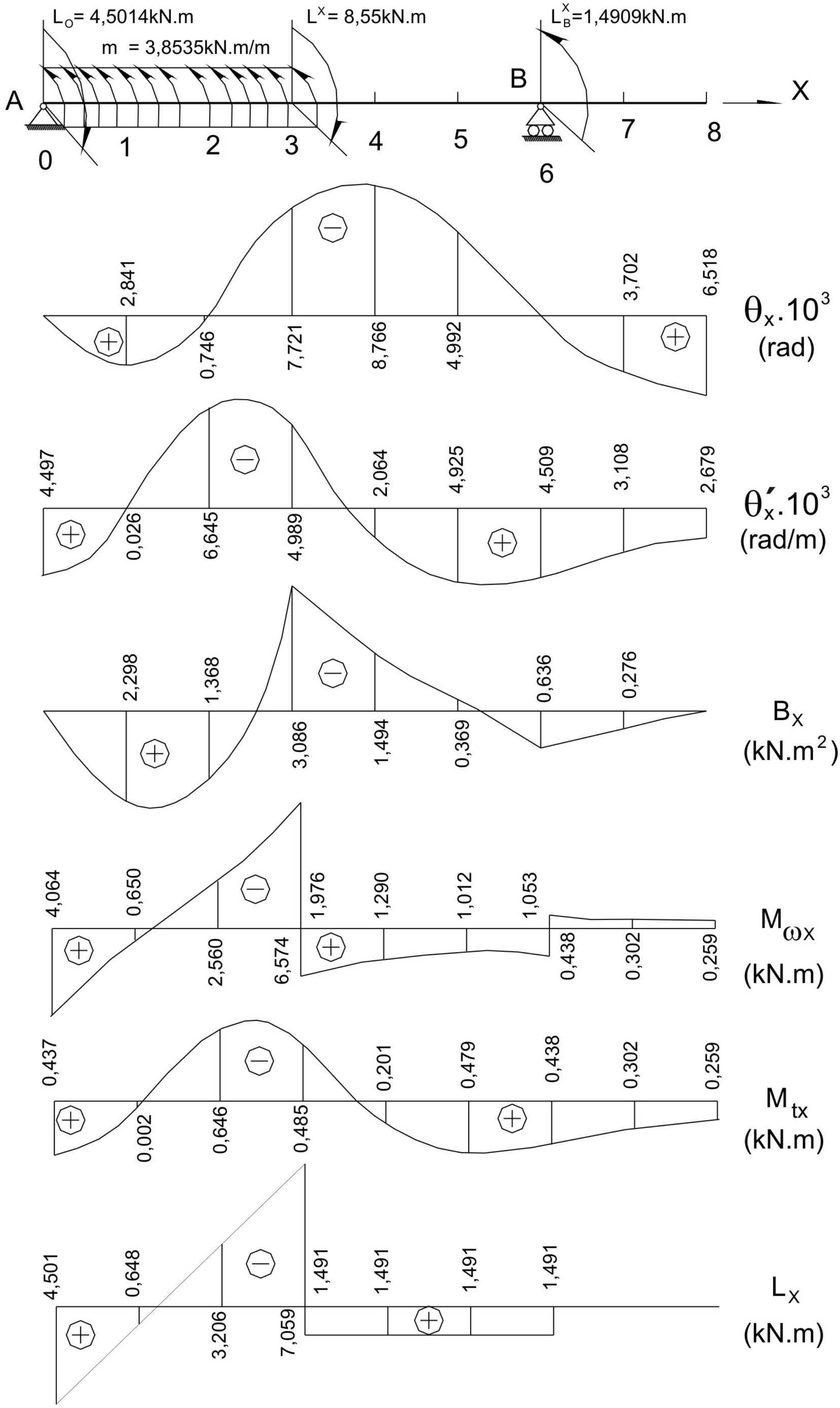
$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{B\omega}{I_\omega} = \frac{6750}{10825{,}23}.z + \frac{3375}{33324}.y - \frac{-30861{,}68}{1584416{,}4}.\omega$$

$$\sigma = 0{,}623543z + 0{,}101278y + 0{,}019478\omega$$

Graficamos el diagrama de esfuerzo normal (σ), calculando sus valores en cada punto de la sección transversal, tal como se muestra en la figura 8.22.

$$\sigma_d = 0{,}623543(-7{,}03) + 0{,}101278(15) + 0{,}019478(-85{,}35) = -4{,}527kN/cm^2$$

$$\sigma_{d'} = 0{,}623543(-7{,}03) + 0{,}101278(-15) + 0{,}019478(85{,}35) = -4{,}240kN/cm^2$$



L_O= 4,5014kN.m
m = 3,8535kN.m/m
L^X= 8,55kN.m
L^X_B=1,4909kN.m
A
B
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
θx.10^3
(rad)
2,841
0,746
7,721
8,766
4,992
3,702
6,518
θ'x.10^3
(rad/m)
4,497
0,026
6,645
4,989
2,064
4,925
4,509
3,108
2,679
Bx
(kN.m^2)
2,298
1,368
3,086
1,494
0,369
0,636
0,276
Mωx
(kN.m)
4,064
0,650
2,560
6,574
1,976
1,290
1,012
1,053
0,438
0,302
0,259
Mtx
(kN.m)
0,437
0,002
0,646
0,485
0,201
0,479
0,438
0,302
0,259
Lx
(kN.m)
4,501
0,648
3,206
7,059
1,491
1,491
1,491
1,491

Fig. 8.21

$$\sigma_b = 0,623543(-7,03) + 0,101278(19) + 0,019478(-108,11) = -4,565 kN/cm^2$$

$$\sigma_{b'} = 0,623543(-7,03) + 0,101278(-19) + 0,019478(108,11) = -4,202 kN/cm^2$$

$$\sigma_g = 0,623543(12,97) + 0,101278(15) + 0,019478(214,65) = 13,787 kN/cm^2$$

$$\sigma_{g'} = 0,623543(12,97) + 0,101278(-15) + 0,019478(-214,65) = 2,387 kN/cm^2$$

$$\sigma_e = 0,623543(12,97) + 0,101278(11) + 0,019478(317,41) = 15,384 kN/cm^2$$

$$\sigma_{e'} = 0,623543(12,97) + 0,101278(-11) + 0,019478(-317,41) = 0,791 kN/cm^2$$

$$\sigma_f = 0,623543(12,97) + 0,101278(31) + 0,019478(-196,39) = 7,402 kN/cm^2$$

$$\sigma_{f'} = 0,623543(12,97) + 0,101278(-31) + 0,019478(196,39) = 8,773 kN/cm^2$$

El esfuerzo normal máximo de tracción se obtiene en el punto “e” del contorno de la sección transversal.

$$\sigma_{máx} = \sigma_e = 15,384 kN/cm^2$$

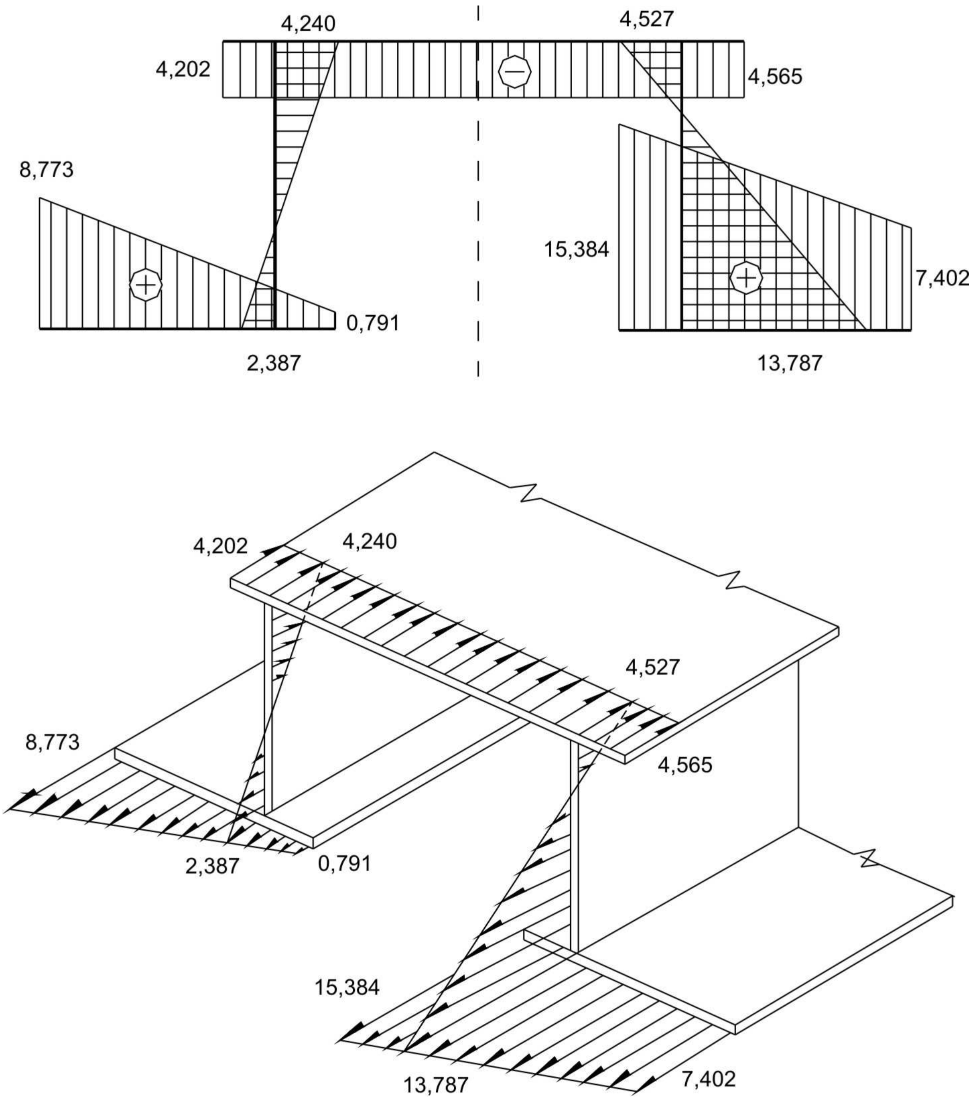


Fig. 8.22

2. Determinamos los esfuerzos tangenciales en la misma sección de la viga, es decir, en la sección 3 – 3, donde se tienen las siguientes fuerzas internas:

$V_y = 22{,}5kN$; $V_z = -11{,}25kN$; $M_\omega = -6{,}574212kN.m$; $M_t = -0{,}484888kN.m$

Reemplazamos los valores en la fórmula del esfuerzo tangencial:

$$\tau = \frac{V_y S_y}{I_y \delta} + \frac{V_z S_z}{I_z \delta} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} \pm \frac{M_t \delta}{I_t}$$

$$\tau = \frac{22{,}5}{10825{,}23}\frac{S_y}{\delta} + \frac{-11{,}25}{33324}\frac{S_z}{\delta} - \frac{-657{,}4212}{1584416{,}4}\frac{S_\omega}{\delta} \pm \frac{-48{,}4888}{121{,}49}\delta$$

$$\tau = 0{,}002078\frac{S_y}{\delta} - 0{,}0003376\frac{S_z}{\delta} + 0{,}0004149\frac{S_\omega}{\delta} \mp 0{,}399\delta$$

Calculamos los esfuerzos tangenciales para cada punto de la sección transversal de la viga y graficamos el diagrama τ (figura 8.23).

$$\tau_{ad} = 0 - 0{,}0003376\frac{884{,}5}{2} + 0{,}0004149\frac{207{,}07}{2} \mp 0{,}399.2 = -0{,}904kN/cm^2$$

$$+0{,}692kN/cm^2$$

$$\tau_{da} = 0{,}002078\frac{210{,}68}{2} - 0{,}0003376\frac{772}{2} + 0{,}0004149\frac{1487{,}32}{2} \mp 0{,}399.2 = -0{,}401kN/cm^2$$

$$+1{,}195kN/cm^2$$

$$\tau_{d'a} = 0{,}002078\frac{-210{,}68}{2} - 0{,}0003376\frac{772}{2} + 0{,}0004149\frac{1487{,}32}{2} \mp 0{,}399.2 = -0{,}839kN/cm^2$$

$$+0{,}757kN/cm^2$$

$$\tau_{db} = 0{,}002078\frac{-56{,}24}{2} - 0{,}0003376\frac{136}{2} + 0{,}0004149\frac{-773{,}84}{2} \mp 0{,}399.2 = -1{,}040kN/cm^2$$

$$+0{,}556kN/cm^2$$

$$\tau_{d'b'} = 0{,}002078\frac{56{,}24}{2} - 0{,}0003376\frac{136}{2} + 0{,}0004149\frac{-773{,}84}{2} \mp 0{,}399.2 = -0{,}923kN/cm^2$$

$$+0{,}673kN/cm^2$$

$$\tau_{bd} = \tau_{b'd'} = \mp 0{,}399.2 = -0{,}798kN/cm^2$$

$$+0{,}798kN/cm^2$$

$$\tau_{dg} = 0{,}002078\frac{266{,}92}{1} - 0{,}0003376\frac{636}{1} + 0{,}0004149\frac{2261{,}16}{1} \mp 0{,}399.1 = +0{,}879kN/cm^2$$

$$+1{,}677kN/cm^2$$

$$\tau_{d'g'} = 0{,}002078\frac{-266{,}92}{1} - 0{,}0003376\frac{636}{1} + 0{,}0004149\frac{2261{,}16}{1} \mp 0{,}399.1 = -0{,}230kN/cm^2$$

$$+0{,}568kN/cm^2$$

$$\tau_{hd} = 0,002078\frac{287,22}{1} - 0,0003376\frac{486}{1} + 0,0004149\frac{2364,66}{1} \mp 0,399.1 = +1,015 kN/cm^2$$

$$+1,813 kN/cm^2$$

$$\tau_{h'd'} = 0,002078\frac{-287,22}{1} - 0,0003376\frac{486}{1} + 0,0004149\frac{2364,66}{1} \mp 0,399.1 = -0,179 kN/cm^2$$

$$+0,619 kN/cm^2$$

$$\tau_{gd} = 0,002078\frac{207,52}{1} - 0,0003376\frac{336}{1} + 0,0004149\frac{968,16}{1} \mp 0,399.1 = +0,320 kN/cm^2$$

$$+1,118 kN/cm^2$$

$$\tau_{g'd'} = 0,002078\frac{-207,52}{1} - 0,0003376\frac{336}{1} + 0,0004149\frac{968,16}{1} \mp 0,399.1 = -0,542 kN/cm^2$$

$$+0,256 kN/cm^2$$

$$\tau_{ge} = 0,002078\frac{-41,5}{0,8} - 0,0003376\frac{-41,6}{0,8} + 0,0004149\frac{-851,3}{0,8} \mp 0,399.0,8 = -0,851 kN/cm^2$$

$$-0,213 kN/cm^2$$

$$\tau_{g'e'} = 0,002078\frac{41,5}{0,8} - 0,0003376\frac{-41,6}{0,8} + 0,0004149\frac{-851,3}{0,8} \mp 0,399.0,8 = -0,636 kN/cm^2$$

$$+0,003 kN/cm^2$$

$$\tau_{gf} = 0,002078\frac{166,02}{0,8} - 0,0003376\frac{294,4}{0,8} + 0,0004149\frac{116,86}{0,8} \mp 0,399.0,8 = +0,048 kN/cm^2$$

$$+0,687 kN/cm^2$$

$$\tau_{g'f'} = 0,002078\frac{-166,02}{0,8} - 0,0003376\frac{294,4}{0,8} + 0,0004149\frac{116,86}{0,8} \mp 0,399.0,8 = -0,814 kN/cm^2$$

$$-0,176 kN/cm^2$$

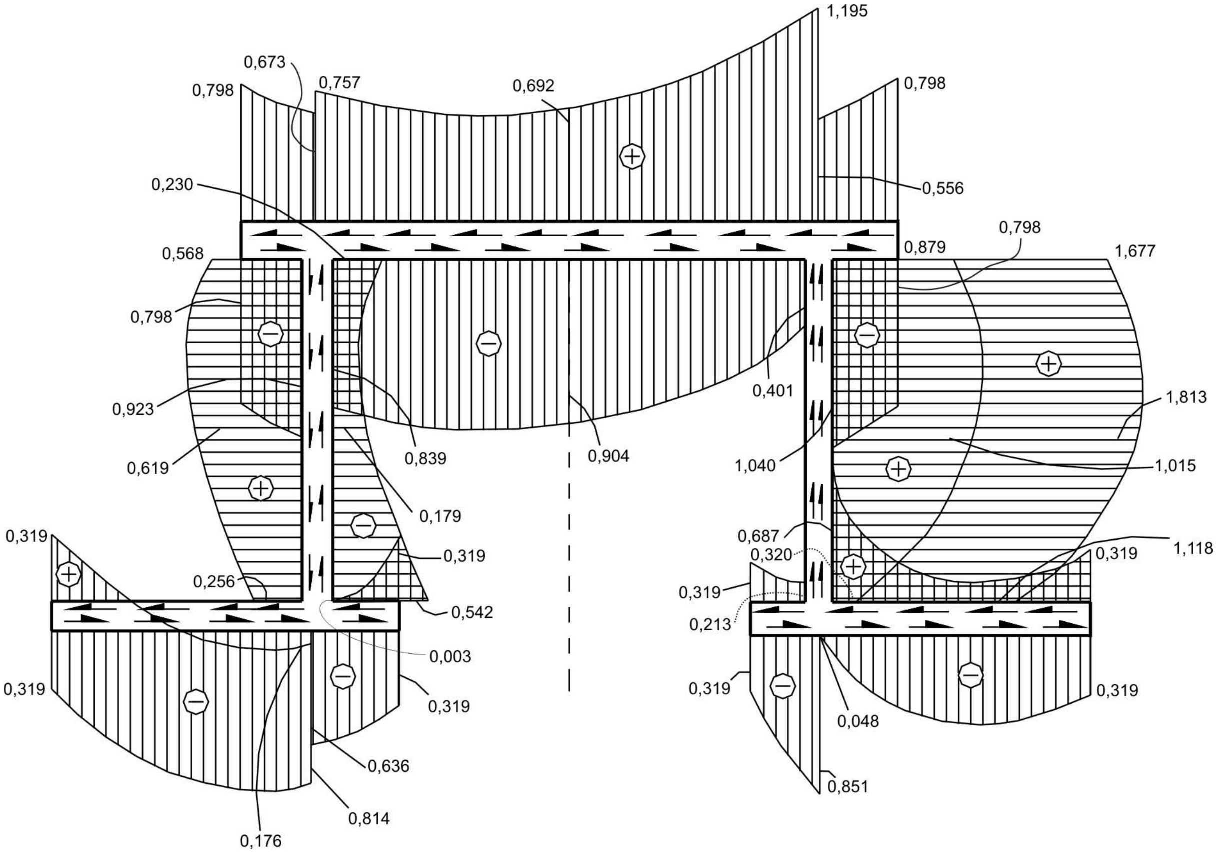
$$\tau_{eg} = \tau_{e'g'} = \tau_{fg} = \tau_{f'g'} = \mp 0,399.0,8 = -0,319 kN/cm^2$$

$$+0,319 kN/cm^2$$

El valor superior de los dos resultados, corresponde a los esfuerzos en los lados inferiores de los puntos de los elementos horizontales y en los lados internos de los puntos de los elementos verticales. Los valores inferiores corresponden a los esfuerzos en los lados superiores de los elementos horizontales y en los lados externos de los puntos de los elementos verticales.

El esfuerzo tangencial máximo se obtuvo en el punto “h”, ubicado en la mitad del lado externo del elemento vertical derecho.

$$\tau_{máx} = 1,813 kN/cm^2$$



1,195
0,673
0,757
0,692
0,798
0,798
0,230
0,556
0,798
0,568
0,879
1,677
0,798
0,401
1,813
0,923
0,839
0,904
1,040
1,015
0,619
0,179
0,319
0,687
1,118
0,320
0,319
0,319
0,256
0,319
0,542
0,213
0,003
0,319
0,319
0,319
0,319
0,048
0,636
0,851
0,814
0,176

Fig. 8.23

CAPITULO 9
ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

9.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El cálculo de estabilidad estructural de un sistema de barras, generalmente, se realiza a través de su esquema inicial indeformable, sometida a la acción de cargas, las cuales pueden ser constantes y crecientes por cualquier ley hasta el momento, en el cual se considera peligroso para la resistencia del material de la estructura.

En muchos casos, antes de que surja la carga de destrucción e inclusive, cuando la carga es menor que lo permisible, suceden cambios en la forma de equilibrio de la estructura. Para ello, en los elementos de la estructura, surgen esfuerzos adicionales, que no se analizan en el cálculo común de resistencia. Puede ser que estos esfuerzos adicionales provoquen la destrucción del material de la estructura, cuando las cargas actuantes son menores que las permisibles, de acuerdo al cálculo de resistencia para la primera fase de equilibrio.

De esta manera, el cálculo estructural por resistencia en cierto modo es insuficiente. En estos casos, será necesario comprobar la estabilidad de la estructura en su primera fase de equilibrio en su estado deformable.

Se dice que una *estructura es estable*, si está sometida a la acción de cargas y conserva su primera forma de equilibrio en estado deformable, pudiendo soportar pequeñas perturbaciones externas, retornando a su anterior estado, cuando estas dejaron de actuar o simplemente desaparecieron.

El paso del estado estable al inestable, se denomina *pérdida de estabilidad*. El momento del paso de uno a otro estado, se llama *estado crítico* y las cargas se denominan *cargas críticas*.

Se denomina *primer estado de pérdida de estabilidad*, cuando se pasa de un estado de equilibrio a otro. Para sistemas de barras, el primer estado es antes del crítico y viene a ser el estado de esfuerzos lineal o uniaxial. Por ejemplo, para pórticos, tal estado surge debido a la acción de cargas puntuales, que no generan flexión. En este caso, la forma de equilibrio se caracteriza por la ausencia de ángulos de giro en los nudos y sus desplazamientos lineales (si se desprecia la compresión de barras), quedando de esta manera todas barras linealmente rectas.

El segundo estado (después de la pérdida de estabilidad) para pórticos, se caracteriza por la existencia de deformaciones por flexión. Para ello, se considera la influencia de las fuerzas axiales en la flexión, surgiendo en los elementos del pórtico los momentos flectores y fuerzas cortantes.

9.2 ESTABILIDAD DE BARRAS

El problema más sencillo de estabilidad de un sistema de barras, es el caso de la determinación de la carga crítica para una barra lineal comprimida centralmente (problema de Euler).

En este caso la carga crítica se determina por la fórmula 9.1.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu.L)^2} \qquad (9.1)$$

Donde:

μ - coeficiente asumido de la longitud de la barra, cuyo valor depende de las condiciones de fijación de los extremos de la barra.

EI - rigidez de la barra en flexión.

La fórmula 9.1 se puede escribir de otra forma, como la mostrada en la fórmula 9.2.

$$P_{cr} = \frac{\nu^2 EI}{L^2} \tag{9.2}$$

Siendo:

$$\nu = \frac{\pi}{\mu} \tag{9.3}$$

Donde:

ν - parámetro que considera la influencia de la fuerza axial en la flexión.

Los valores de los coeficientes μ y ν para las diferentes condiciones de borde o extremos, se muestran en la figura 9.1, donde en forma de línea punteada se muestra el eje de la barra después de perder la estabilidad.

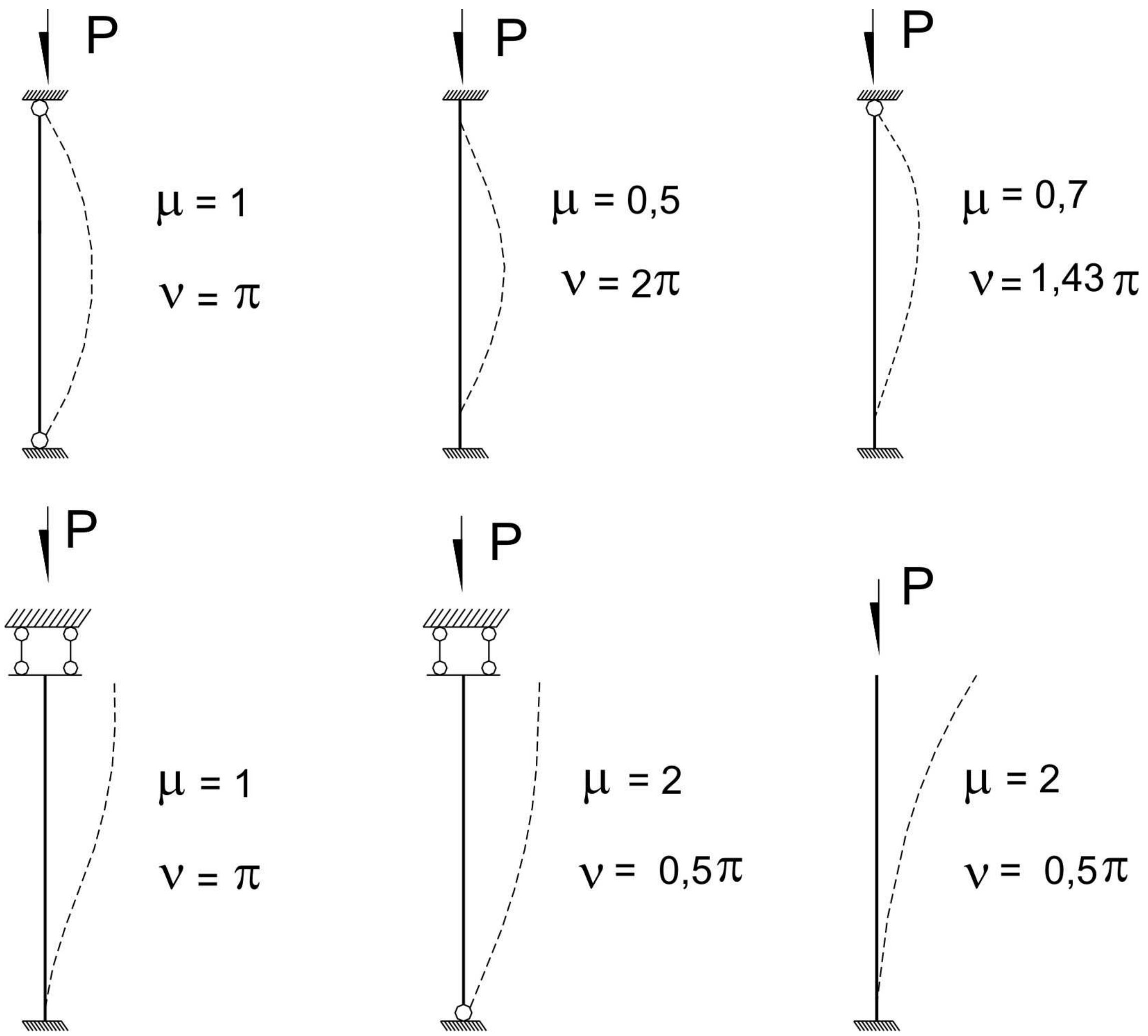


Fig. 9.1

9.3 SUPOSICIONES EN EL CÁLCULO DE ESTABILIDAD DE PORTICOS

Para el cálculo de estabilidad de pórticos se analizan solamente las cargas en los nudos, las cuales no generan flexión transversal en el primer estado (figura 9.2). No se consideran las deformaciones de desplazamiento, ni las deformaciones longitudinales de las barras. Sólo se consideran las deformaciones por flexión.

De acuerdo a las suposiciones admitidas para pórticos antes de la pérdida de estabilidad, no habrá flexión, los momentos flectores M y fuerzas cortantes V serán iguales a cero. Asimismo, las fuerzas longitudinales N en sus elementos se determinarán sin complicaciones (por ejemplo, por el método de los nudos). En el momento de pérdida de estabilidad, el pórtico en compresión se transformará en flexo-compresión. Los nudos del pórtico experimentarán deformaciones angulares y lineales, y en sus elementos aparecerán momentos flectores y fuerzas cortantes adicionales.

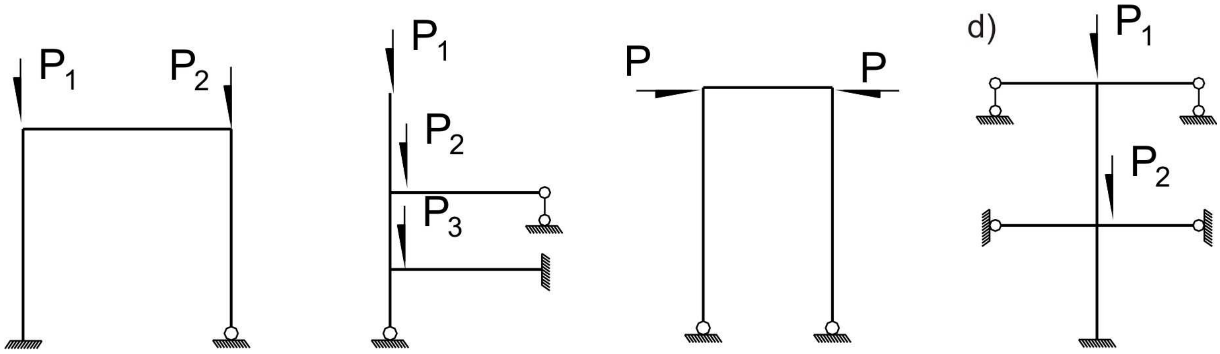


Fig. 9.2

9.4 FORMULAS DEL METODO DE DESPLAZAMIENTOS PARA BARRAS EN FLEXO-COMPRESION

Para resolver problemas de estabilidad de pórticos, se utiliza uno de los métodos clásicos de la Mecánica Estructural, esto es el método de desplazamientos en la forma descompuesta.

De acuerdo a este método, expresamos los momentos flectores y fuerzas cortantes en los extremos de las barras, en función de sus desplazamientos angulares y lineales.

Previamente, analizamos la dependencia entre el parámetro ν y la fuerza axial N en la barra. Si en la barra actúa una fuerza de compresión P, luego la fuerza axial será $N = -P$ (figura 9.3).

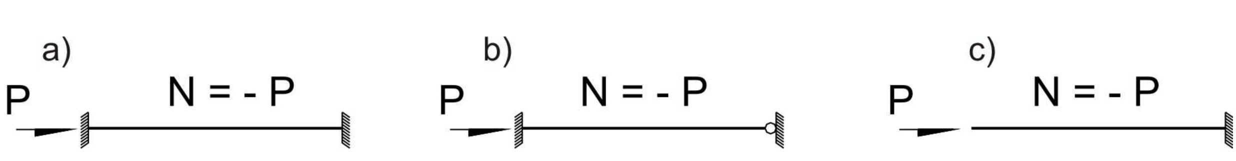


Fig. 9.3

A partir de la fórmula 9.2, obtenemos:

$$N_{cr} = \frac{\nu_{cr}^2 EI}{L^2} = \frac{\nu_{cr}^2 i}{L} \qquad (9.4)$$

Hasta la pérdida de estabilidad será:

$$N = \frac{\nu^2 i}{L} \qquad (9.5)$$

De donde:

$$\nu = \sqrt{\frac{N.L}{i}} \tag{9.6}$$

Donde:

$i = \frac{EI}{L}$ - rigidez por metro lineal de la barra.

Cuando se utiliza la fórmula 9.6, se toma el valor absoluto de la fuerza axial N.

Ahora, analizamos las fórmulas de los momentos en los apoyos y fuerzas cortantes para las barras con diferentes tipos de apoyos.

BARRA DOBLEMENTE EMPOTRADA:

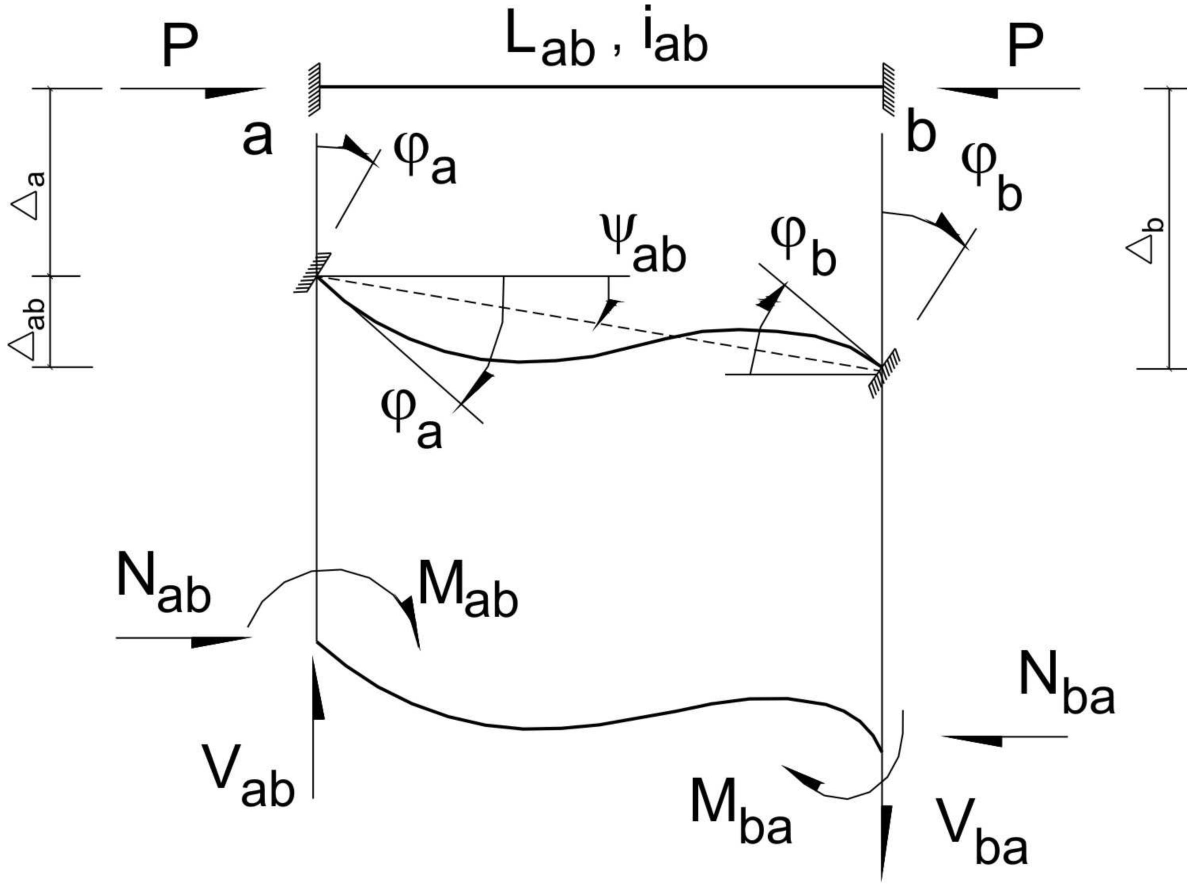


Fig. 9.4

a) Si $N_{ab} \neq 0$ y $V_{ab} \neq 0$

$$M_{ab} = 2i_{ab}\left[\alpha_{ab}\varphi_a + \beta_{ab}\varphi_b - (\alpha+\beta)_{ab}\psi_{ab}\right] \tag{9.7}$$

$$V_{ab} = -\frac{2i_{ab}}{L_{ab}}\left[(\alpha+\beta)_{ab}(\varphi_a + \varphi_b) - \gamma_{ab}\psi_{ab}\right]$$

b) Si $N_{ab} \neq 0$ y $V_{ab} = 0$

$$M_{ab} = i_{ab}\left(\frac{\nu_{ab}}{tg\nu_{ab}}\varphi_a - \frac{\nu_{ab}}{sen\nu_{ab}}\varphi_b\right) \tag{9.8}$$

c) Si $N_{ab} = 0$ y $V_{ab} \neq 0$

$$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) \qquad (9.9)$$

$$V_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{L_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab})$$

d) Si $N_{ab} = 0$ y $V_{ab} = 0$

$$M_{ab} = i_{ab}(\varphi_a - \varphi_b) \qquad (9.10)$$

En las fórmulas 9.7 se tiene que:

$$\alpha_{ab} = \frac{\nu_{ab}}{2tg\nu_{ab}} \cdot \frac{tg\nu_{ab} - \nu_{ab}}{2tg\left(\frac{\nu_{ab}}{2}\right) - \nu_{ab}}$$

$$\beta_{ab} = \frac{\nu_{ab}}{2sen\nu_{ab}} \cdot \frac{\nu_{ab} - sen\nu_{ab}}{2tg\left(\frac{\nu_{ab}}{2}\right) - \nu_{ab}} \qquad (9.11)$$

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu_{ab}^3}{2tg\left(\frac{\nu_{ab}}{2}\right) - \nu_{ab}}$$

BARRA CON UN EXTREMO EMPOTRADO Y EL OTRO SIMPLEMENTE APOYADO O ARTICULADO:

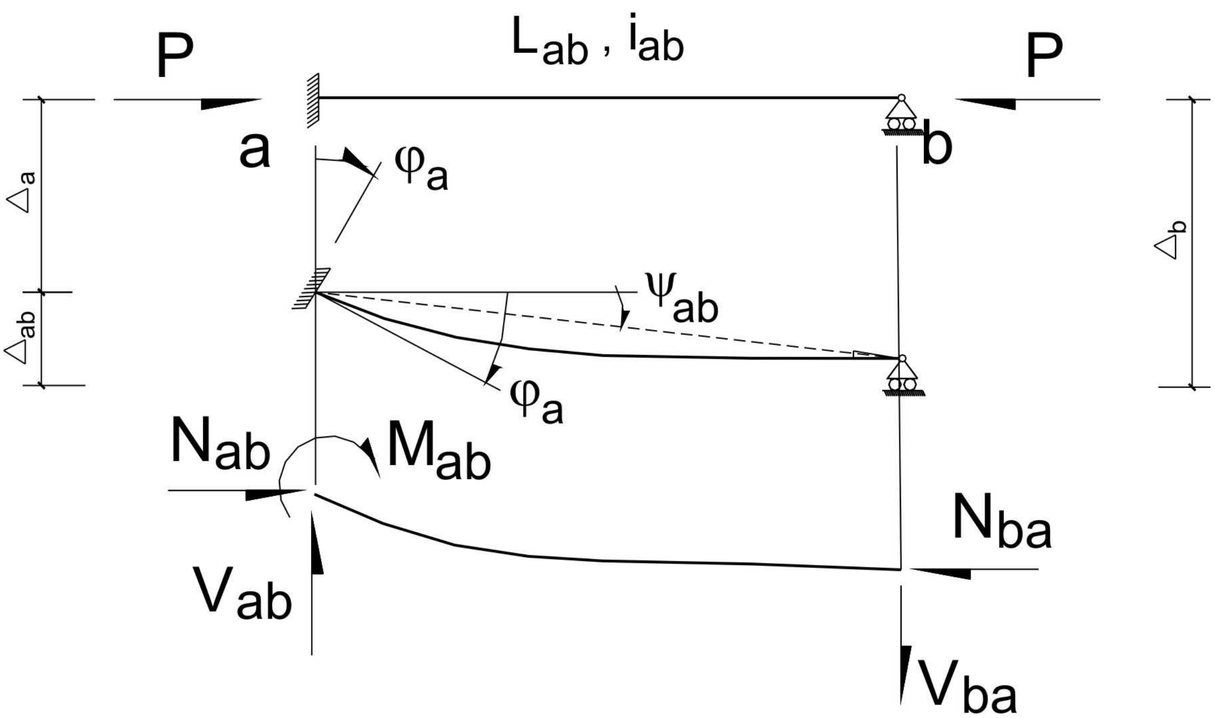


Fig. 9.5

a) Si $N_{ab} \neq 0$ y $V_{ab} \neq 0$

$$M_{ab} = i_{ab}\tilde{\alpha}_{ab}(\varphi_a - \psi_{ab}) \tag{9.12}$$

$$V_{ab} = -\frac{i_{ab}}{L_{ab}}(\tilde{\alpha}_{ab}\varphi_a - \tilde{\gamma}_{ab}\psi_{ab})$$

b) Si $N_{ab} \neq 0$ y $V_{ab} = 0$

$$M_{ab} = -i_{ab}\nu_{ab}\,tg\nu_{ab}\varphi_a \tag{9.13}$$

c) Si $N_{ab} = 0$ y $V_{ab} \neq 0$

$$M_{ab} = 3i_{ab}(\varphi_a - \psi_{ab}) \tag{9.14}$$

$$V_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{L_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab})$$

d) Si $N_{ab} = 0$ y $V_{ab} = 0$

$$M_{ab} = 0 \tag{9.15}$$

En las fórmulas 9.12 se tiene que:

$$\tilde{\alpha}_{ab} = \frac{\nu_{ab}^2\,tg\nu_{ab}}{tg\nu_{ab} - \nu_{ab}} \tag{9.16}$$

$$\tilde{\gamma}_{ab} = \frac{\nu_{ab}^3}{tg\nu_{ab} - \nu_{ab}}$$

BARRA CON UN EXTREMO EMPOTRADO Y EL OTRO LIBRE:

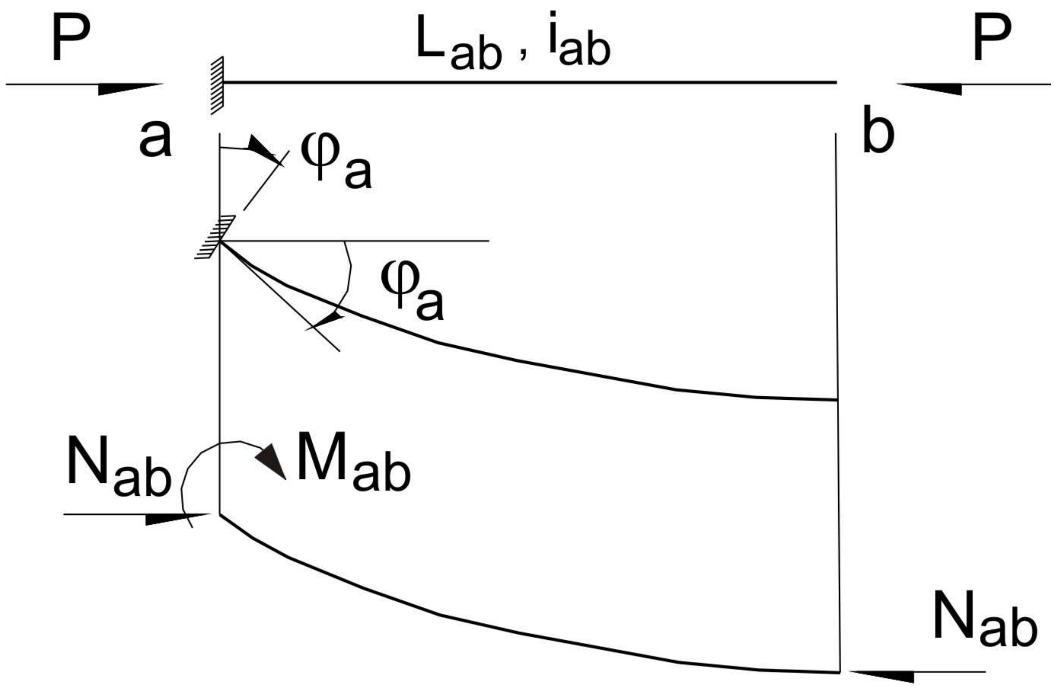


Fig. 9.6

$$M_{ab} = -i_{ab}\nu_{ab}tg\nu_{ab}\varphi_a \quad (9.17)$$

En las fórmulas 9.7 – 9.17 se tiene que:

φ_a y φ_b - ángulos de giro de los nudos (empotramientos ficticios del sistema principal del método de desplazamientos).

Δ_a y Δ_b - desplazamientos lineales de los nudos "a" y "b".

Δ_{ab} - diferencia de desplazamientos entre los nudos "a" y "b".

$\psi_{ab} = \dfrac{\Delta_{ab}}{L_{ab}}$ - ángulo de desviación de la barra a-b.

N_{ab}, V_{ab}, M_{ab} - fuerzas internas en el punto "a" de la barra a-b.

N_{ba}, V_{ba}, M_{ba} - fuerzas internas en el punto "b" de la barra b-a.

Se sobreentiende, que se deben de cumplir las condiciones $\psi_{ab} = \psi_{ba}$, $N_{ab} = N_{ba} = -P$, $\nu_{ab} = \nu_{ba}$, $\alpha_{ab} = \alpha_{ba}$, $\beta_{ab} = \beta_{ba}$, $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$, $\tilde{\alpha}_{ab} = \tilde{\alpha}_{ba}$, $\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{\gamma}_{ba}$.

El momento flector se considera positivo, si actúa en el nudo en sentido antihorario y en la barra en sentido horario.

La fuerza cortante es positiva, si hace girar la barra en sentido horario respecto al extremo opuesto. El sentido positivo de los ángulos de giro de los nudos y los ángulos de desviación de las barras se toma en sentido horario. En las figuras 9.4 – 9.6 se muestran los sentidos positivos de M, V, φ y ψ.

Cuando se utilizan las fórmulas anteriormente descritas del método de desplazamientos, será necesario previamente conocer los valores de las fuerzas axiales en las barras del pórtico. En cierto modo, estos valores son desconocidos, lo cual es consecuencia de la no-linealidad de los problemas de estabilidad. Suponiendo que, el estado deformado (desviado) es muy cercano al inicial, se puede asumir en la primera aproximación, que las fuerzas axiales después de la pérdida de estabilidad son iguales a las fuerzas axiales antes de la pérdida de estabilidad.

Las fuerzas axiales hasta la pérdida de estabilidad, se pueden determinar, utilizando el esquema de rótulas en los pórticos. Como en la primera fase, los momentos flectores y fuerzas cortantes son iguales a cero, entonces el diagrama de fuerzas axiales hasta la pérdida de estabilidad concuerda con el diagrama de fuerzas axiales del esquema de rótulas. De esto, se desprende la comprobación, si se encuentra el pórtico en estado de esfuerzos lineal, ante la acción de las cargas en los nudos. Es por ello, que se analiza el esquema de rótulas en el pórtico con barras adicionales, que garantizan su geometría invariable. Si las fuerzas en todas las barras adicionales son nulas, debido a la acción de las cargas en los nudos, entonces en los elementos del pórtico inicial no existirán fuerzas cortantes y momentos flectores.

Si a partir de las condiciones de equilibrio de una parte del pórtico, se tiene que la fuerza cortante es cero, entonces se deben de utilizar las fórmulas cuando $V_{ab} = 0$. En este caso, para las fórmulas de momento flector, se eliminarán los ángulos de desviación ψ de las barras y en las

fórmulas solo se considerarán los ángulos de giro φ de los nudos. En la figura 9.7 se muestran algunos ejemplos de este tipo de casos.

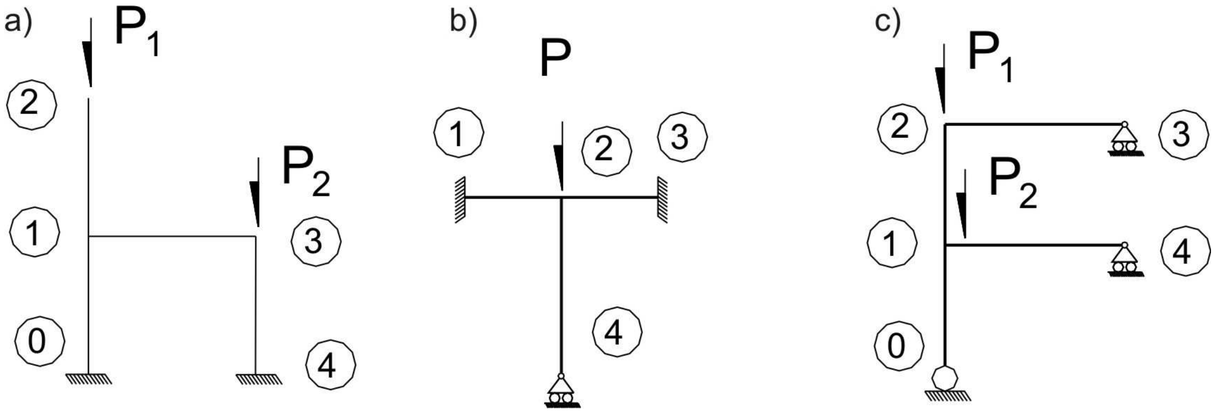


Fig. 9.7

CASO "a": Como $V_{21}=0 \quad\Rightarrow\quad M_{12}=-i_{12}(\nu tg\nu)_{12}\varphi_1$

CASO "b": Como $V_{24}=0 \quad\Rightarrow\quad M_{24}=-i_{24}(\nu tg\nu)_{24}\varphi_2$

CASO "c": Como $V_{21}=0 \quad\Rightarrow\quad M_{21}=i_{21}\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{21}\varphi_2-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{21}\varphi_1\right]$

$V_{10}=0 \quad\Rightarrow\quad M_{10}=-i_{10}(\nu tg\nu)_{10}\varphi_1$

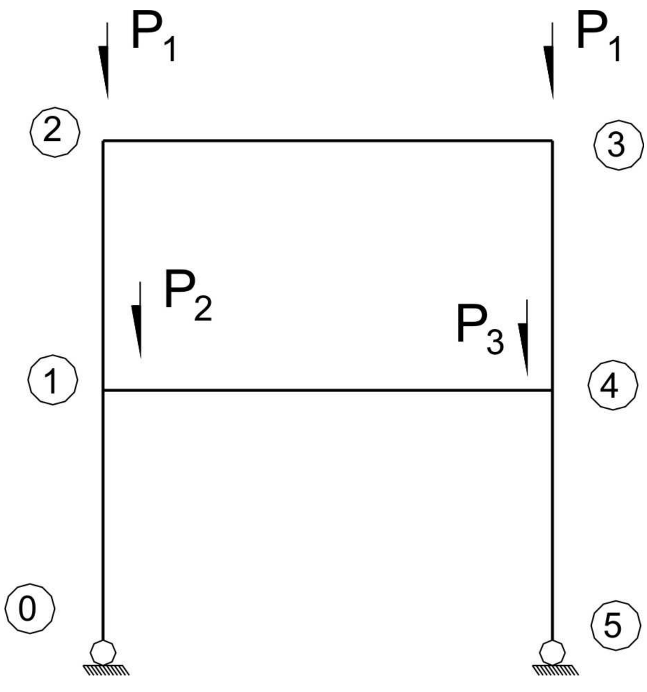


Fig. 9.8

Cuando se trata de pórticos simétricos de una sola luz, el cual pierde su estabilidad en la forma antisimétrica, entonces de la condición de equilibrio y de simetría, se tiene que la fuerza cortante en las columnas es igual a cero (figura 9.8). Esto quiere decir, que tendremos las siguientes condiciones:

$$V_{21} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_{21} = i_{21}\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{21}\varphi_2 - \left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{21}\varphi_1\right]$$

$$V_{10} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_{10} = -i_{10}(\nu tg\nu)_{10}\varphi_1$$

Si en la barra, la fuerza axial es cero, entonces se aplicarán las fórmulas cuando $N_{ab} = 0$.

Si analizamos las fórmulas descritas anteriormente, tenemos que cuando $N_{ab} \neq 0$, los momentos flectores M y fuerzas cortantes V son funciones dependientes de los ángulos de giro φ y de los ángulos de desviación ψ, así como de las fuerzas axiales N, como consecuencia de la fórmula 9.6.

Los valores de α, β, γ, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ y otras funciones dependientes del parámetro de estabilidad ν, se pueden obtener a través de la tabla 2 del anexo.

9.5 SISTEMA DE ECUACIONES DEL METODO DE DESPLAZAMIENTOS

El sistema principal del método de desplazamientos, se forma a partir de las conexiones adicionales – empotramientos elásticos, a excepción del giro de los nudos rígidos, así como las barras adicionales tipo apoyos, que impiden los desplazamientos lineales de los nudos del pórtico. Para formar cada ecuación, se iguala a cero la reacción en la correspondiente conexión adicional. Si la conexión es un empotramiento elástico, entonces será necesario hacer un corte en el nudo donde está la conexión e igualamos a cero la suma de momentos de todas las barras que convergen con dicho nudo. Si se analiza la barra adicional tipo apoyo, entonces será necesario hacer un corte en esta parte del pórtico, incluyendo la barra tipo apoyo y todas las barras del pórtico que tienen que ver con el desplazamiento en esa dirección, aplicándole a esta parte del pórtico las cargas externas y fuerzas cortantes, determinándose la reacción en la barra adicional, a partir de la condición de equilibrio de la parte analizada del pórtico, es decir, igualándolo a cero.

Como propiedades del sistema de ecuaciones, podemos indicar que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas de desplazamientos. Asimismo, la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones, es simétrico y estos sistemas de ecuaciones son homogéneos, es decir, que sus miembros libres son iguales a cero, lo cual se utiliza para elaborar las ecuaciones de estabilidad.

9.6 ECUACION DE ESTABILIDAD DE PORTICOS

Como es conocido, el sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas, tiene la forma:

$$A.X = 0 \qquad (9.18)$$

Donde:

$X = |x_1, x_2, ..., x_n|$

$A = \|a_{ij}\|$, siendo $i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,n$.

Este tipo de ecuaciones, puede tener una solución trivial, es decir:

$$X \equiv 0$$

Esto en problemas de estabilidad, implica una igualdad a cero de los desplazamientos angulares y lineales de los nudos del pórtico, esto quiere decir, que no existe pérdida de estabilidad, cuyo caso no es interesante.

Las soluciones diferentes de cero del sistema 9.18, se pueden determinar, si el determinante de la matriz A es igual a cero, lo cual implica que la estructura ha perdido su estabilidad.

$$\text{Det}A = 0 \qquad (9.19)$$

Las ecuaciones de la fórmula 9.19, se denominan *ecuaciones de estabilidad*.

El determinante de la matriz A es una función compleja trascendental del parámetro ν, por ello, la ecuación 9.19 tiene en calidad de incógnita este parámetro. La ecuación 9.19 tiene un infinito número de raíces, los cuales se encuentran en la parte positiva del eje numérico. El menor valor de estas raíces, corresponde a la carga crítica mínima, lo cual es de interés práctico. A través del valor de ν, determinamos la carga crítica, utilizando la fórmula 9.4.

9.7 CALCULO DE ESTABILIDAD DE PORTICOS NO SIMETRICOS

Para el pórtico de la figura 9.9, se pide:

a) Plantear las ecuaciones de estabilidad.

b) Determinar la carga crítica cuando $P_1 = P_2$, $n = 2$, $h = 4m$, $L = 9m$.

c) Investigar la influencia de la rigidez de la viga en la magnitud de la carga crítica cuando $P_1 = P_2$.

d) Investigar la influencia mutua de los valores de las cargas críticas P_1 y P_2, cuando $n = 2$.

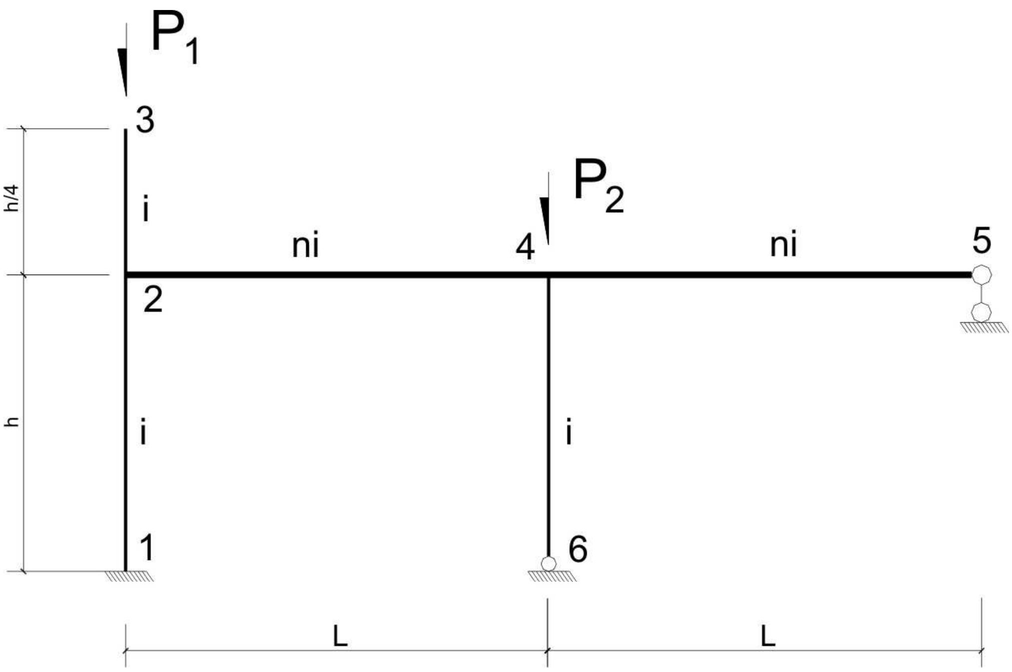


Fig. 9.9

ECUACIONES DE ESTABILIDAD

Para plantear las ecuaciones de estabilidad, aplicamos el método de desplazamientos.

1. GRADO DE INDETERMINACION CINEMATICA

El pórtico dado tiene dos nudos rígidos, que son los nudos 2 y 4, en consecuencia se tendrá:

$$n_n = 2(\varphi_2, \varphi_4)$$

Para determinar el número de posibles desplazamientos lineales, convertimos al pórtico en un esquema de rótulas (figura 9.10).

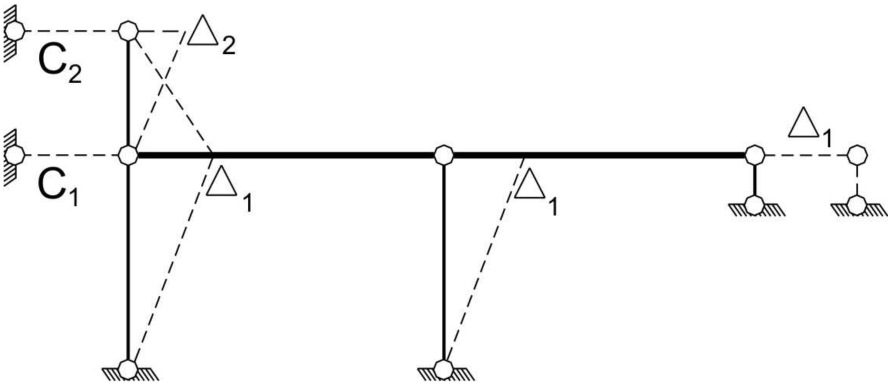


Fig. 9.10

Como se puede apreciar, para que el sistema sea geométricamente invariable, ha sido necesario incorporar dos barras adicionales tipo apoyo, las cuales son C_1, el cual impide el posible desplazamiento horizontal del nudo 2 y de toda la viga continua 2-4-5 y C_2, que impide el desplazamiento horizontal del nudo 3 (extremo del volado). De esta manera, el pórtico dado tiene dos desplazamientos lineales desconocidos Δ_1 y Δ_2 (figura 9.10).

$$n_d = 2(\Delta_1, \Delta_2)$$

El grado de indeterminación cinemática por el método de desplazamientos será:

$$G.I. = n_n + n_d = 4$$

Este número de incógnitas puede disminuir, si no se consideran en calidad de incógnitas los desplazamientos lineales de los nudos para las barras, en las cuales la fuerza cortante es cero. Tal tipo de barras en el pórtico dado es el volado 2-3. En consecuencia, el desplazamiento lineal Δ_2 se puede eliminar del grupo de incógnitas (esto no quiere decir que el desplazamiento en el nudo 3 sea cero). De esta manera, el número de incógnitas se reduce a tres, esto es:

$$N = 3(\varphi_2, \varphi_4, \Delta_1)$$

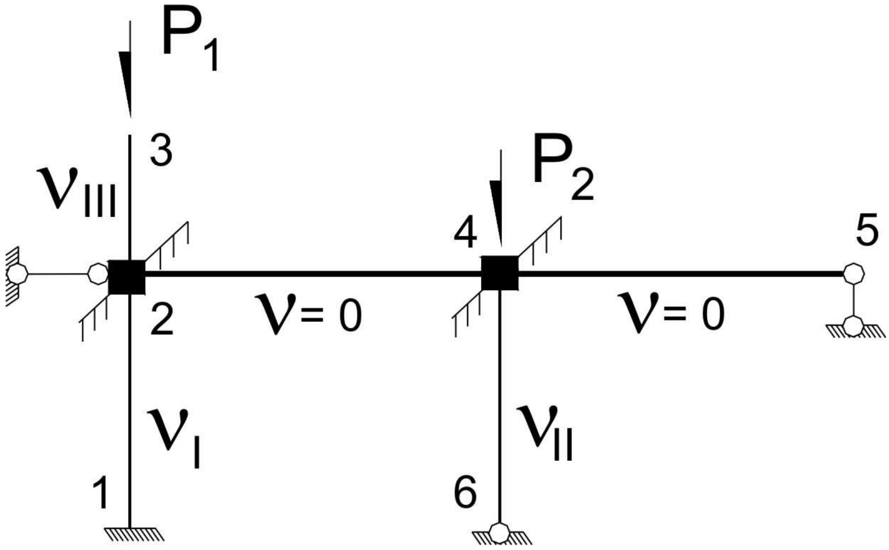


Fig. 9.11

El sistema principal del método de desplazamientos se obtiene incorporando conexiones adicionales en el esquema del pórtico. Por ejemplo, para fijar los nudos 2 y 4 de posibles giros, incorporamos en estos nudos los empotramientos elásticos y para impedir el desplazamiento lineal horizontal, incorporamos la barra tipo apoyo en el nudo 2 (figura 9.11).

2. DIAGRAMA "N" Y DETERMINACION DE PARAMETROS DE ESTABILIDAD

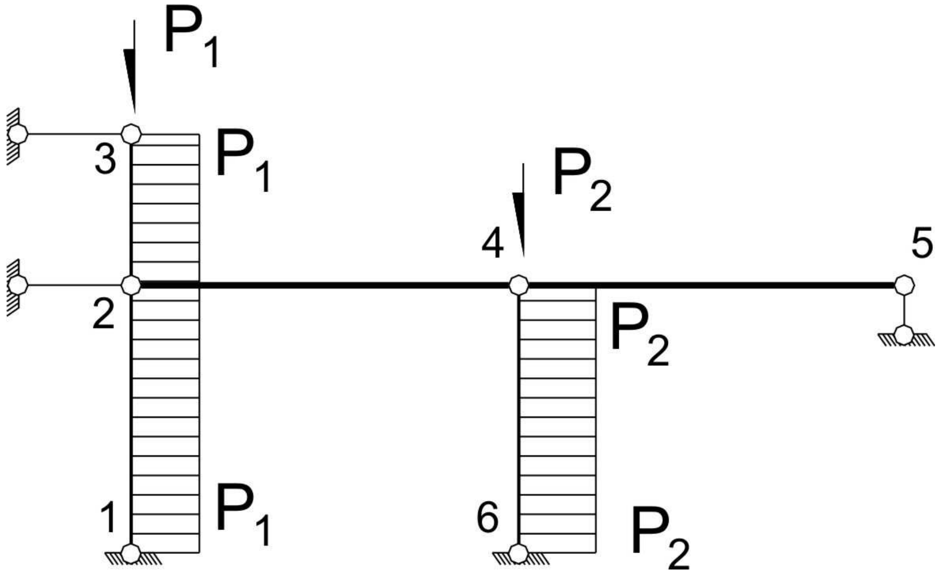


Fig. 9.12 Diagrama N

Para determinar los parámetros de estabilidad, graficamos el diagrama de fuerza axiales en el esquema de rótulas del pórtico, en el cual para garantizar que el sistema sea geométricamente invariable, incorporamos dos barras adicionales tipo apoyos (figura 9.12).

Determinamos los valores de los parámetros ν_{jk}:

$$\nu_{12} = \sqrt{\frac{N_{12}L_{12}}{i_{12}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = \nu_I$$

$$\nu_{23} = \sqrt{\frac{N_{23}L_{23}}{i_{23}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{4i}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = 0,5\nu_I = \nu_{III}$$

$$\nu_{46} = \sqrt{\frac{N_{46}L_{46}}{i_{46}}} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \nu_{II}$$

$$\nu_{24} = \sqrt{\frac{N_{24}L_{24}}{i_{24}}} = 0$$

$$\nu_{45} = \sqrt{\frac{N_{45}L_{45}}{i_{45}}} = 0$$

Los valores de los parámetros de las barras 1-2 y 2-3 dependen de la fuerza P_1 y se diferencia el uno del otro por el múltiplo, identificándolo uno de estos parámetros como ν_I y el otro dependiente de este, pero simbolizado como ν_{III}. En forma análoga, tenemos que el parámetro de la barra 4-6, depende de la fuerza P_2 y lo identificamos como ν_{II} (figura 9.11).

3. SISTEMA DE ECUACIONES CANONICAS

Describimos las ecuaciones del método de desplazamientos, expresando la igualdad a cero en las conexiones adicionales para el estado de flexo-compresión del pórtico.

Primero analizamos el nudo 2, mostrando su equilibrio en la figura 9.13.

NUDO 2

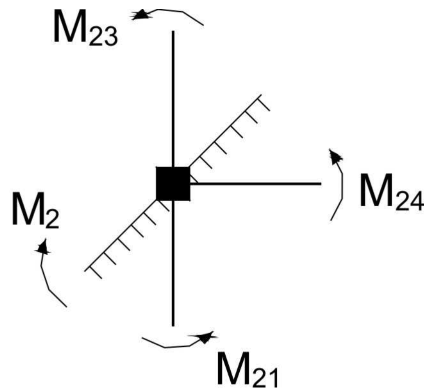


Fig. 9.13

$$M_2 = M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para el caso de la barra 2-1, tenemos que recordar que $\nu_{21} = \nu_I$

$$M_{21} = 2i_{21}\left[\alpha_{21}\varphi_2 + \beta_{21}\varphi_1 - (\alpha+\beta)_{21}\psi_{21}\right] = 2i\left[\alpha_I\varphi_2 - (\alpha+\beta)_I\frac{\Delta}{h}\right]$$

Para la barra 2-3, tenemos que $\nu_{23} = \nu_{III}$ y $V_{23} = 0$

$$M_{23} = -i_{23}(\nu tg\nu)_{23}\varphi_2 = -i(\nu tg\nu)_{III}\varphi_2$$

Para el caso de la barra 2-4, tenemos que $\nu_{24} = 0$ y $N_{24} = 0$

$$M_{24} = 2i_{24}(2\varphi_2 + \varphi_4 - 3\psi_{24}) = 2ni(2\varphi_2 + \varphi_4)$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$\left[4n + 2\alpha_I - (\nu tg\nu)_{III}\right]\varphi_2 + 2n\varphi_4 - 2(\alpha+\beta)_I\frac{\Delta}{h} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Ahora, analizamos el nudo 4, mostrando su equilibrio en la figura 9.14.

NUDO 4

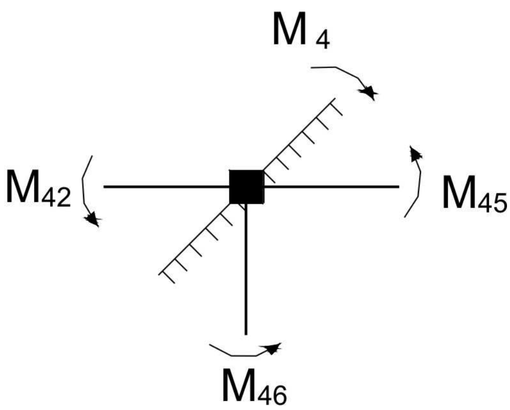


Fig. 9.14

$$M_4 = M_{45} + M_{46} + M_{42} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Para la barra 4-5, tenemos que $\nu_{45} = 0$ y $N_{45} = 0$

$$M_{45} = 3i_{45}(\varphi_4 - \psi_{45}) = 3ni\varphi_4$$

Para el caso de la barra 4-6, tenemos que $\nu_{46} = \nu_{II}$

$$M_{46} = i_{46}\tilde{\alpha}_{46}(\varphi_4 - \psi_{46}) = i\tilde{\alpha}_{II}\left(\varphi_4 - \frac{\Delta}{h}\right)$$

Para la barra 4-2, tenemos que $\nu_{42} = 0$ y $N_{42} = 0$

$$M_{42} = 2i_{42}(2\varphi_4 + \varphi_2 - 3\psi_{42}) = 2ni(2\varphi_4 + \varphi_2)$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (c) y obtenemos:

$$2n\varphi_2 + (7n + \tilde{\alpha}_{II})\varphi_4 - \tilde{\alpha}_{II}\frac{\Delta}{h} = 0 \qquad \text{(d)}$$

Para analizar el efecto del desplazamiento, efectuamos un corte en la parte del pórtico donde se producirá el desplazamiento Δ_1, esto es lo mostrado en la figura 9.15.

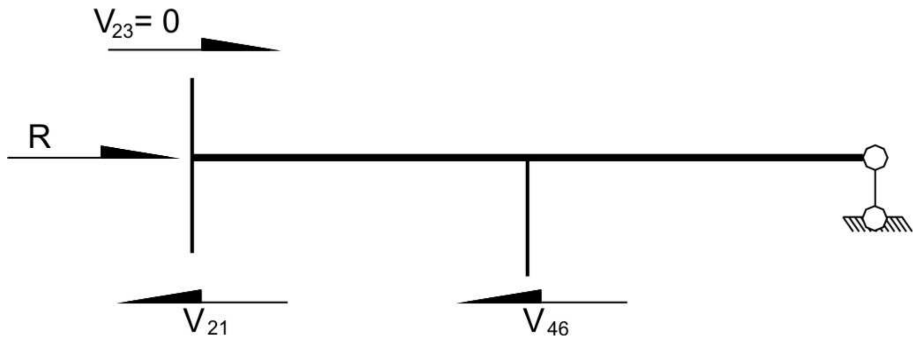


Fig. 9.15

$$R = V_{21} + V_{46} = 0 \qquad \text{(e)}$$

Para la barra 2-1, tenemos que $\nu_{21} = \nu_I$

$$V_{21} = -\frac{2i_{21}}{L_{21}}\left[(\alpha+\beta)_{21}(\varphi_2 + \varphi_1) - \gamma_{21}\psi_{21}\right] = -\frac{2i}{h}\left[(\alpha+\beta)_I\varphi_2 - \gamma_I\frac{\Delta}{h}\right]$$

$$V_{46} = -\frac{i_{46}}{L_{46}}(\tilde{\alpha}_{46}\varphi_4 - \tilde{\gamma}_{46}\psi_{46}) = -\frac{i}{h}\left(\tilde{\alpha}_{II}\varphi_4 - \tilde{\gamma}_{II}\frac{\Delta}{h}\right)$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (e) y obtenemos:

$$-2(\alpha+\beta)_I\varphi_2 - \tilde{\alpha}_{II}\varphi_4 + (2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II})\frac{\Delta}{h} = 0 \qquad \text{(f)}$$

De esta manera, tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas φ_2, φ_4 y $\frac{\Delta}{h}$, cuyos coeficientes de las incógnitas son simétricos respecto a la diagonal principal, esto es, la matriz de coeficientes es simétrica.

$$[4n + 2\alpha_I - (\nu tg\nu)_{III}]\varphi_2 + 2n\varphi_4 - 2(\alpha+\beta)_I \frac{\Delta}{h} = 0$$

$$2n\varphi_2 + (7n + \tilde{\alpha}_{II})\varphi_4 - \tilde{\alpha}_{II}\frac{\Delta}{h} = 0 \qquad \text{(g)}$$

$$-2(\alpha+\beta)_I\varphi_2 - \tilde{\alpha}_{II}\varphi_4 + (2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II})\frac{\Delta}{h} = 0$$

4. ECUACION DE ESTABILIDAD

La ecuación de estabilidad lo obtenemos, cuando igualamos a cero el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (g), esto es:

$$D = \begin{vmatrix} 4n + 2\alpha_I - (\nu tg\nu)_{III} & 2n & -2(\alpha+\beta)_I \\ 2n & 7n + \tilde{\alpha}_{II} & -\tilde{\alpha}_{II} \\ -2(\alpha+\beta)_I & -\tilde{\alpha}_{II} & 2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(h)}$$

La ecuación (h) tiene en calidad de incógnitas al coeficiente n y los parámetros de estabilidad ν_I, ν_{II} y ν_{III}, los cuales contienen a su vez a los coeficientes α, β, γ, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\gamma}$, quedando así:

$$D(n, \nu_I, \nu_{II}, \nu_{III}) = 0 \qquad \text{(i)}$$

DETERMINACION DE LA CARGA CRÍTICA

Para la relación dada entre las fuerzas externas $P_1 = P_2$, surge una dependencia entre los parámetros ν_I y ν_{II}. Por ello, el valor de los parámetros ν_{jk} para todas las barras del pórtico son funciones lineales dependientes de ν_I. En particular:

$$\nu_{II} = \nu_{46} = \nu_I \qquad \text{(j)}$$

Además, por dato el coeficiente $n = 2$, teniendo la ecuación de estabilidad (h) la siguiente forma:

$$D(\nu_I) = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_1 - (\nu tg\nu)_{III} & 4 & -2(\alpha+\beta)_I \\ 4 & 14 + \tilde{\alpha}_{II} & -\tilde{\alpha}_{II} \\ -2(\alpha+\beta)_I & -\tilde{\alpha}_{II} & 2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(k)}$$

Determinamos la primera raíz de la ecuación (k), asumiendo en forma consecutiva que ν_I es igual a 0; 0,8; 1,6 y así sucesivamente. Para cada valor de ν_I, calculamos $D(\nu_I)$, siendo más sencillo si tenemos previamente los valores de las funciones α, β, γ, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$.

Por ejemplo, para el valor de $\nu_I = 0$, tenemos que $\nu_{III} = 0{,}5\nu_I = 0$, $\nu_{II} = \nu_I = 0$ y a través de la tabla 2 del anexo, determinamos los valores de los coeficientes para los correspondientes valores del parámetro de estabilidad, tal como se muestra en la tabla 9.1, los cuales son:

$\alpha_I = 2{,}000$; $(\alpha+\beta)_I = 3{,}000$; $\gamma_I = 6{,}000$; $(\nu tg\nu)_{III} = 0$; $\tilde{\alpha}_{II} = 3{,}000$; $\tilde{\gamma}_{II} = 3{,}000$

Si reemplazamos estos valores en la fórmula (k) y efectuamos su cálculo, tenemos:

$$D(0) = \begin{vmatrix} 8+2.2-0 & 4 & -2.3 \\ 4 & 14+3 & -3 \\ -2.3 & -3 & 2.6+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 17 & -3 \\ -6 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 2244$$

Efectuamos el mismo proceso para el resto de valores, cuyos resultados se muestran en la tabla 9.1.

Tabla 9.1

ν_I	α_I	$(\alpha+\beta)_I$	γ_I	$\nu_{III} = 0{,}5\nu_I$	$(\nu tg\nu)_{III}$	$\nu_{II} = \nu_I$	$\tilde{\alpha}_{II}$	$\tilde{\gamma}_{II}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	0	0	3,000	3,000	2244,00
0,8	1,957	2,968	5,616	0,4	0,169	0,8	2,869	2,229	1896,77
1,6	1,823	2,870	4,459	0,8	0,824	1,6	2,446	-0,114	931,78
2,4	1,583	2,699	2,519	1,2	3,086	2,4	1,591	-4,169	-310,48
2,1	1,687	2,772	3,339	1,05	1,859	2,1	1,979	-2,431	137,14
2,2	1,654	2,749	3,078	1,1	2,161	2,2	1,861	-2,979	-19,18

En función a los datos obtenidos, graficamos el diagrama de dependencia $D = f(\nu_I)$ (figura 9.16).

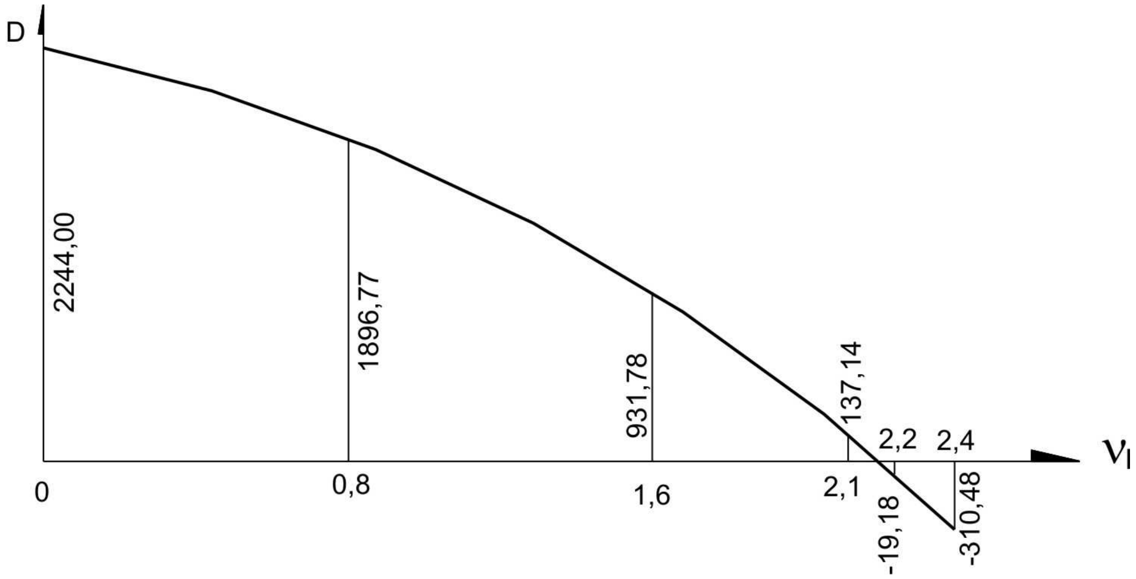


Fig. 9.16

Determinamos el valor exacto del parámetro crítico ν_I en el intervalo $[2{,}1\,;\ 2{,}2]$ (figura 9.17), efectuando una interpolación lineal.

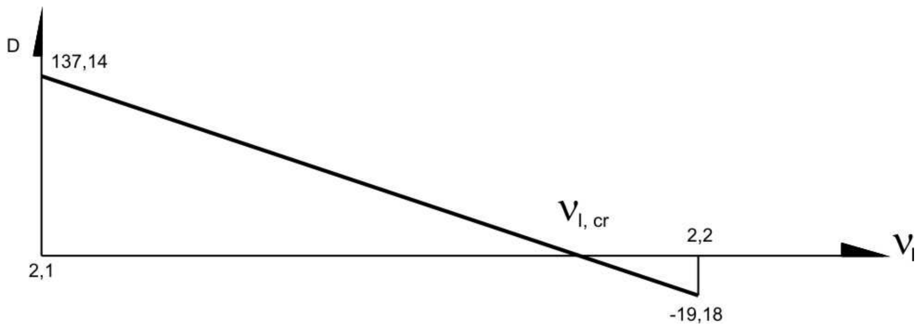


Fig. 9.17

$$\nu_{I,cr} = 2{,}1 + \frac{137{,}14}{137{,}14 + 19{,}18}(2{,}2 - 2{,}1) = 2{,}188$$

Determinamos el valor de la carga crítica, a través de expresión:

$$\nu_{12} = \sqrt{\frac{N_{12}L_{12}}{i_{12}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = \nu_I \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = \frac{\nu_I^2 . i}{h} = \frac{2{,}188^2 . i}{h} = 4{,}7873\frac{i}{h}$$

Consideramos, que la columna es de sección cuadrada, de lado $b = 0{,}075h$:

$$b = 0{,}075.4 = 0{,}30m$$

$$I = \frac{b^4}{12} = 6{,}75.10^{-4}\,m^4$$

Asumimos, que el material de la columna es concreto de alta resistencia, con módulo de elasticidad $E_c = 3.10^7\,kPa$, determinando para ello su rigidez por metro lineal.

$$i = \frac{EI}{h} = \frac{3.10^7.6{,}75.10^{-4}}{4} = 5{,}0625.10^3\,kN.m$$

De esta manera, la carga crítica será:

$$P_{1,cr} = \frac{4{,}7873.5{,}0625.10^3}{4} = 6058{,}93kN$$

INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DE LA VIGA EN LA MAGNITUD DE LA CARGA CRÍTICA

Esta investigación consiste en analizar el gráfico de dependencia $\nu_{cr} = f(n)$, de la ecuación (i) de estabilidad.

Por cuanto la relación entre las cargas sigue siendo la misma, es decir $P_1 = P_2$, la dependencia (j) entre los parámetros de estabilidad, seguirá siendo la misma y el determinante (i) se convierte en una función de dos variables n y ν_I . De esta manera, la ecuación será:

$$D(\nu_I, n) = 0 \qquad (l)$$

Para construir el gráfico de dependencia de la ecuación dada, será necesario determinar los límites de variación de las variables n y ν_I . A partir, de las condiciones físicas, es claro que $''n''$ varía entre los límites $[0;\infty]$, para lo cual analizamos ambos extremos.

1. DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA PARA $n = 0$

   Cuando $n = 0$, la rigidez de la viga en flexión es cero, esto es, la viga solamente puede soportar cargas axiales, lo cual corresponde al esquema de rótulas o articulaciones en los extremos de las vigas 2-4 y 4-5, tal como se muestra en la figura 9.18.

   Elaboramos la ecuación del método de desplazamientos para el pórtico mostrado en la figura 9.18, la cual lo obtenemos a partir de la fórmula (h), en la cual reemplazamos $n = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha_I - (\nu tg\nu)_{III} & 0 & -2(\alpha+\beta)_I \\ 0 & \tilde{\alpha}_{II} & -\tilde{\alpha}_{II} \\ -2(\alpha+\beta)_I & -\tilde{\alpha}_{II} & 2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II} \end{vmatrix} = 0$$

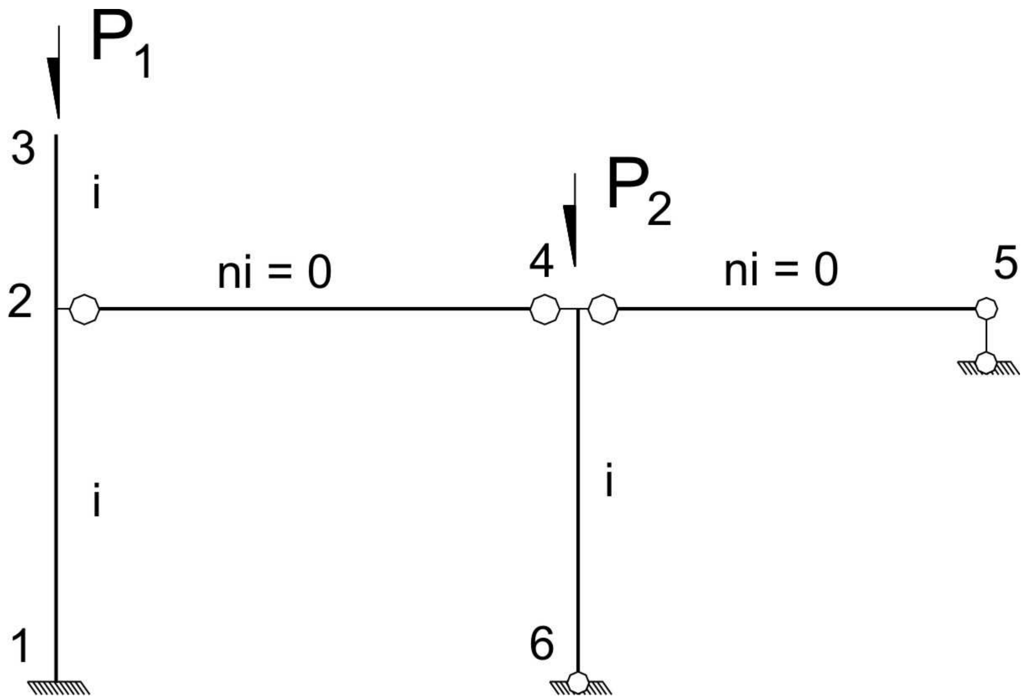


Fig. 9.18

Resolvemos la ecuación en forma análoga al proceso anterior, tal como se muestra en la tabla 9.2.

Tabla 9.2

ν_I	α_I	$(\alpha+\beta)_I$	γ_I	$\nu_{III} = 0{,}5\nu_I$	$(\nu tg\nu)_{III}$	$\nu_{II} = \nu_I$	$\tilde{\alpha}_{II}$	$\tilde{\gamma}_{II}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	0	0	3,000	3,000	36,00
0,8	1,957	2,968	5,616	0,4	0,169	0,8	2,869	2,229	12,71
1,6	1,823	2,870	4,459	0,8	0,824	1,6	2,446	-0,114	-36,70
1,0	1,932	2,950	5,399	0,5	0,273	1,0	2,794	1,794	1,05
1,1	1,918	2,939	5,273	0,55	0,342	1,1	2,749	1,539	-5,31

Determinamos el valor exacto del parámetro crítico ν_I, a través de la interpolación lineal:

$$\nu_{I,cr} = 1{,}0 + \frac{1{,}05}{1{,}05 + 5{,}31}(1{,}1 - 1{,}0) = 1{,}016$$

2. DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA PARA $n = \infty$

Cuando $n = \infty$ la rigidez en flexión de la viga es muchísimo mayor que el de la columna, por ello, se puede considerar que es un cuerpo absolutamente rígido, que no permite deformarse. Por ello, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_4 = 0$ y el pórtico se puede esquematizar como una estructura compuesta de dos partes, que se deforma independientemente una parte de la otra (figura 9.19).

La parte I del sistema, corresponde a una barra en voladizo empotrada en el nudo 2 y la parte II del sistema, viene a estar dado por dos columnas 1-2 y 4-6, las cuales están unidas por una barra absolutamente sólida 2-4-5. La única incógnita en el pórtico (desde el punto de vista del método de desplazamientos), es el desplazamiento lineal del nudo 2.

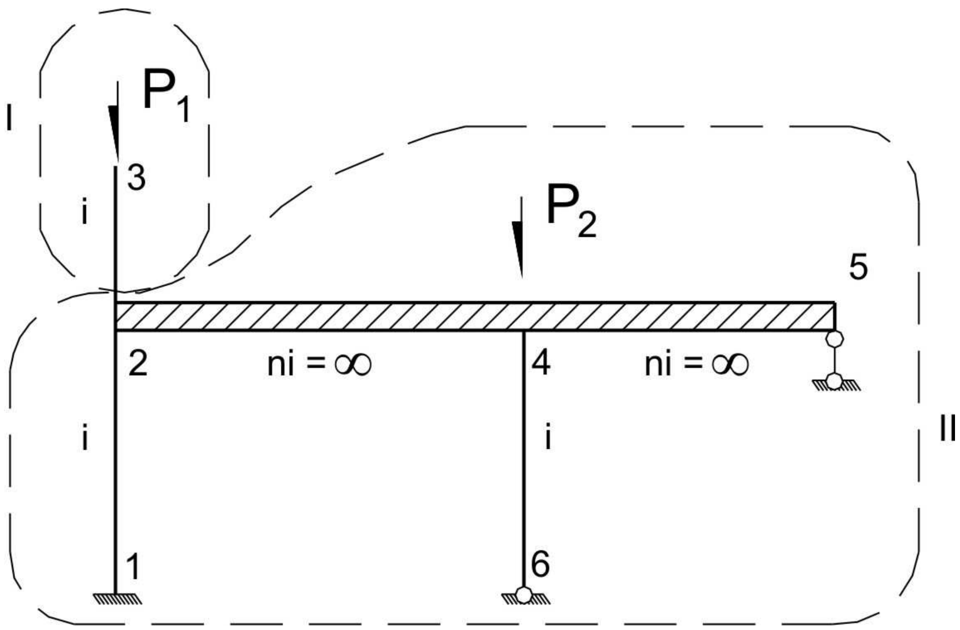


Fig. 9.19

Ahora, planteamos la ecuación del método de desplazamientos, efectuando un corte de la parte del pórtico que contiene a la barra rígida (figura 9.20) y analizamos su equilibrio.

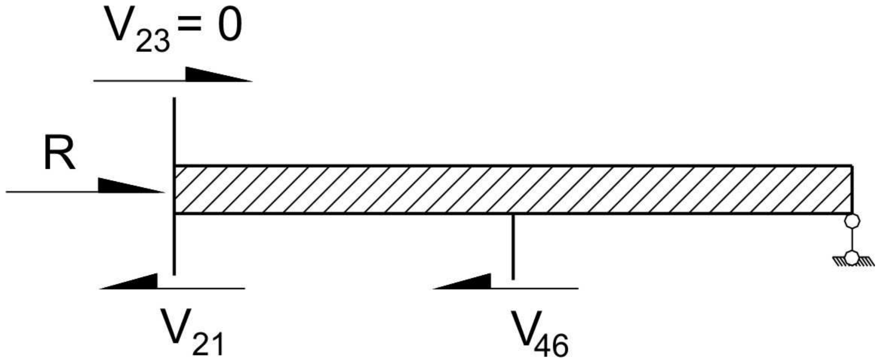


Fig. 9.20

$$R = V_{21} + V_{46} = 0$$

$$V_{21} = -\frac{2i_{21}}{L_{21}}\left[(\alpha+\beta)_{21}(\varphi_2+\varphi_1) - \gamma_{21}\psi_{21}\right] = \frac{2i}{h^2}\gamma_I\Delta$$

$$V_{46} = -\frac{i_{46}}{L_{46}}(\tilde{\alpha}_{46}\varphi_4 - \tilde{\gamma}_{46}\psi_{46}) = \frac{i}{h^2}\tilde{\gamma}_{II}\Delta$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{i}{h^2}(2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II})\Delta = 0$$

De donde:

$$D = 2\gamma_I + \tilde{\gamma}_{II} = 0$$

Resolvemos este problema, cuyos cálculos se muestran en la tabla 9.3.

Tabla 9.3

ν_I	γ_I	$\nu_{II} = \nu_I$	$\tilde{\gamma}_{II}$	D
0	6,000	0	3,000	15,000
0,8	5,616	0,8	2,229	13,461
1,6	4,459	1,6	-0,114	8,804
2,4	2,519	2,4	-4,169	0,869
2,5	2,220	2,5	-4,812	-0,372

Obtenemos el valor exacto del parámetro crítico a través de la interpolación lineal.

$$\nu_{I,cr} = 2{,}4 + \frac{0{,}869}{0{,}869 + 0{,}372}(2{,}5 - 2{,}4) = 2{,}470$$

De esta manera, los límites de variación de las variables n y $\nu_{I,cr}$ son:

$$0 \leq n \leq \infty$$

$$1{,}016 \leq \nu_{I,cr} \leq 2{,}470$$

3. DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA PARA VALORES INTERMEDIOS DE n Y CONSTRUCCION DEL DIAGRAMA $\nu_{cr} - n$

Si damos varios valores (no menor de tres) para $\nu_{I,cr}$ en los rangos de 1,016 hasta 2,470 y resolvemos las ecuaciones cuadráticas respecto a n, obtenemos los valores necesarios para construir el diagrama $\nu_{cr} - n$. Para el cálculo se debe de tener en cuenta que las raíces negativas se eliminan. Para la obtención de los resultados, podemos utilizar los obtenidos anteriormente, esto es para $\nu_{I,cr} = 1{,}016$ el valor de $n = 0$, $\nu_{I,cr} = 2{,}188$ se obtiene cuando $n = 2$ y $\nu_{I,cr} = 2{,}470$ corresponde al valor de $n = \infty$, lo cual se muestra en la tabla 9.4.

Tabla 9.4

ν_I	α_I	$(\alpha + \beta)_I$	γ_I	$\nu_{III} = 0{,}5\nu_I$	$(\nu tg\nu)_{III}$	$\nu_{II} = \nu_I$	$\tilde{\alpha}_{II}$	$\tilde{\gamma}_{II}$	n
1,016	-	-	-	-	-	-	-	-	0
1,500	1,845	2,886	4,628	0,750	0,707	1,500	2,511	0,268	0,217
2,000	1,718	2,794	3,588	1,000	1,557	2,000	2,088	-1,912	1,014
2,188	-	-	-	-	-	-	-	-	2
2,470	-	-	-	-	-	-	-	-	∞

Para los otros puntos del diagrama, damos valores; por ejemplo, asumimos $\nu_{I,cr} = 1{,}50$ y la ecuación (h) se convierte en:

$$D = \begin{vmatrix} 4n + 2{,}983 & 2n & -5{,}772 \\ 2n & 7n + 2{,}511 & -2{,}511 \\ -5{,}772 & -2{,}511 & 9{,}524 \end{vmatrix} = 0$$

De donde obtenemos una ecuación cuadrática:

$$228{,}576n^2 + 94{,}071n - 31{,}127 = 0$$

$$n = 0{,}217$$

Graficamos el diagrama $\nu_{cr} - n$ (figura 9.21), en el cual se muestra que el incremento de rigidez de la viga hasta $2i$ influye notoriamente en la estabilidad del pórtico. El incremento posterior de dicha rigidez, prácticamente no influye en la estabilidad de la estructura.

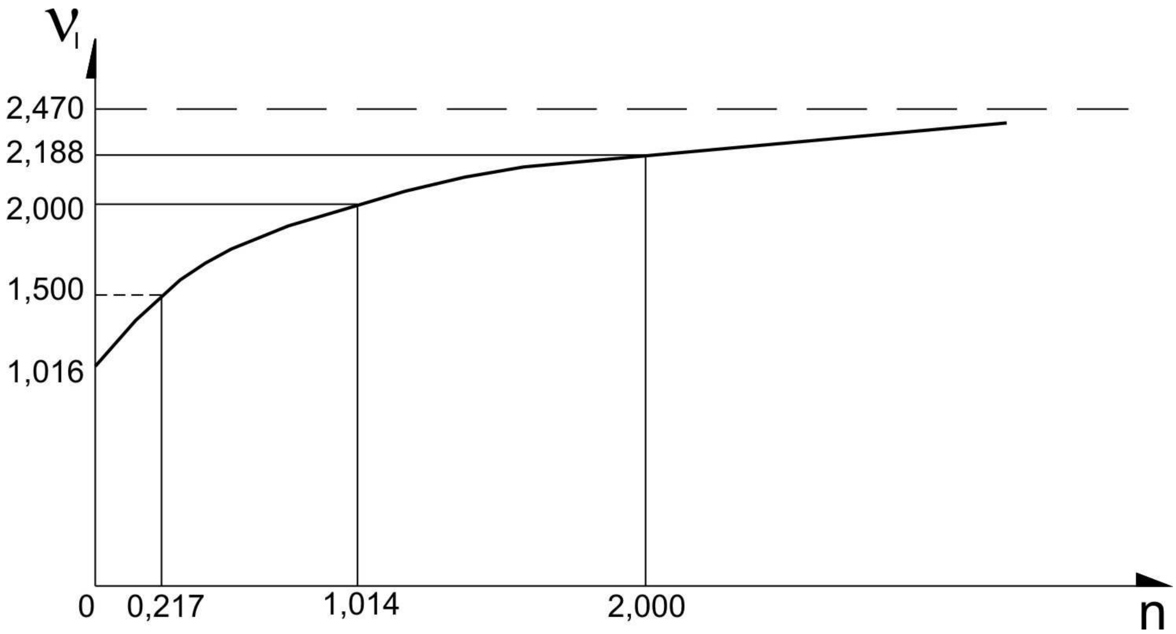


Fig. 9.21

INFLUENCIA MUTUA DE LOS VALORES DE LAS CARGAS CRITICAS P_1 Y P_2

La ecuación de estabilidad cuando $n = 2$, representado en la fórmula (k) muestra la dependencia requerida, la cual tiene la forma:

$$D(\nu_I, \nu_{II}, \nu_{III}) = 0 \qquad \text{(m)}$$

Para construir el diagrama de dependencia, determinamos los límites de variación de las variables $\nu_{I,cr}$ y $\nu_{II,cr}$. Por cuanto, las cargas puntuales son independientes la una de la otra, entonces cuando $P_1 = 0$ la magnitud de $P_{2,cr}$ tendrá su máximo valor y viceversa.

Cuando $P_1 = 0$, se tendrá que $\nu_I = 0$, $\nu_{III} = 0{,}5\nu_I = 0$. En consecuencia, $\alpha_I = 2$, $(\alpha + \beta)_I = 3$, $\gamma_I = 6$ y $(\nu tg\nu)_{III} = 0$. Si reemplazamos los valores dados en la ecuación (k) obtendremos:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 14 + \tilde{\alpha}_{II} & -\tilde{\alpha}_{II} \\ -6 & -\tilde{\alpha}_{II} & 12 + \tilde{\gamma}_{II} \end{vmatrix} = 0$$

Resolvemos la mencionada ecuación, tomando valores del parámetro ν_{II} (tabla 9.5).

Tabla 9.5

ν_{II}	$\tilde{\alpha}_{II}$	$\tilde{\gamma}_{II}$	D
0	3,000	3,000	2244,000
0,8	2,869	2,229	2084,338
1,6	2,446	-0,114	1609,107
2,4	1,591	-4,169	824,538
3,2	-0,191	-10,431	-273,692
2,9	0,659	-7,751	178,146
3,0	0,408	-8,592	33,600
3,1	0,127	-9,483	-116,250

Interpolando obtenemos:

$$\nu_{II,cr} = 3{,}0 + \frac{33{,}60}{33{,}60 + 116{,}25}(3{,}1 - 3{,}0) = 3{,}022$$

Determinamos el valor de la carga crítica, a través de la expresión:

$$\nu_{46} = \sqrt{\frac{N_{46}L_{46}}{i_{46}}} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \nu_{II} \quad \Rightarrow \quad P_{2,cr}^{máx} = \frac{\nu_{II}^2 . i}{h} = 3{,}022^2 \frac{i}{h} = 9{,}132 \frac{i}{h}$$

Análogamente, cuando $P_1 = 0$, tenemos que $\nu_{II} = 0$, $\tilde{\alpha}_{II} = 3$, $\tilde{\gamma}_{II} = 3$. En este caso, la ecuación (k) tiene la forma:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_I - (\nu tg\nu)_{III} & 4 & -2(\alpha+\beta)_I \\ 4 & 17 & -3 \\ -2(\alpha+\beta)_I & -3 & 2\gamma_I + 3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvemos la ecuación dada, eligiendo los valores del parámetro ν_I y sus correspondientes, mostrados en la tabla 9.6.

Tabla 9.6

ν_I	α_I	$(\alpha+\beta)_I$	γ_I	$\nu_{III} = 0{,}5\nu_I$	$(\nu tg\nu)_{III}$	D
0	2	3	6	0	0	2244,000
0,8	1,957	2,968	5,616	0,4	0,169	2051,666
1,6	1,823	2,870	4,459	0,8	0,824	1482,167
2,4	1,583	2,699	2,519	1,2	3,086	536,971
2,6	1,503	2,644	1,909	1,3	4,683	218,421
2,7	1,459	2,615	1,585	1,35	6,4	-4,968

Interpolando obtenemos:

$$\nu_{I,cr} = 2{,}6 + \frac{218{,}421}{218{,}421 + 4{,}968}(2{,}7 - 2{,}6) = 2{,}698$$

Determinamos el valor de la carga crítica, a través de la expresión:

$$\nu_{12} = \sqrt{\frac{N_{12}L_{12}}{i_{12}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = \nu_I \qquad \Rightarrow \qquad P_{1,cr}^{máx} = \frac{\nu_I^2 i}{h} = 2{,}698^2 \frac{i}{h} = 7{,}279 \frac{i}{h}$$

En base a los datos obtenidos, graficamos la dependencia $P_{2,cr} = f(P_{1,cr})$, cuyo diagrama se muestra en la figura 9.22.

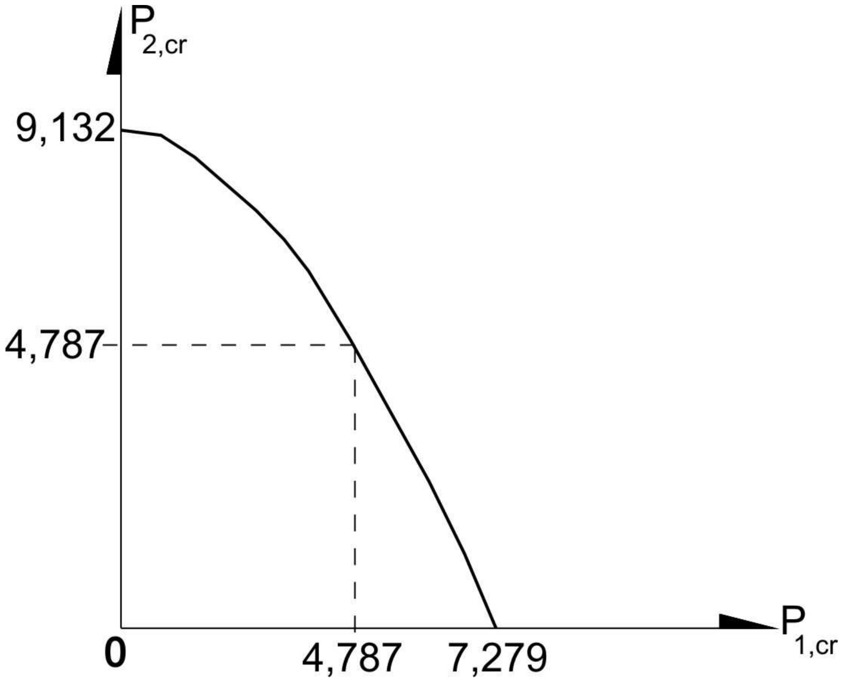


Fig. 9.22

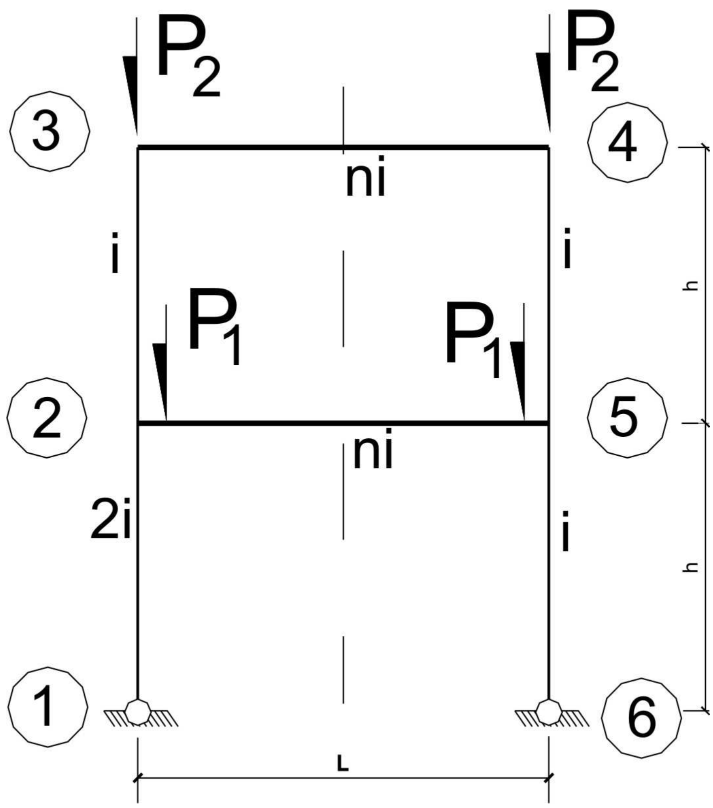


Fig. 9.23

9.8 CALCULO DE ESTABILIDAD DE PORTICOS SIMETRICOS

Para el pórtico mostrado en la figura 9.23, se pide:

a) Determinar la carga crítica, correspondiente a la forma más peligrosa de pérdida de estabilidad, cuando $P_1 = 3P_2$ y $n = 1$.

b) Investigar la influencia de la rigidez de la viga en la magnitud de la carga crítica.

c) Investigar la influencia mutua de las cargas críticas P_1 y P_2, cuando $n = 1$.

Es conveniente indicar, que para el cálculo por estabilidad de pórticos simétricos, se debe de considerar que las formas más peligrosas de pérdida de estabilidad, son simétricas o antisimétricas. Para ello, será necesario formular las ecuaciones de desplazamientos y estabilidad en forma separada para las formas simétricas y antisimétricas. Después de determinar P_{cr}^{sim} y $P_{cr}^{a.s.}$, se debe de elegir el menor valor en calidad de crítico y correspondientemente, la forma de pérdida de estabilidad será la más peligrosa.

1. GRADO DE INDETERMINACION CINEMATICA

Para determinar el grado de indeterminación cinemática, utilizamos el método de desplazamientos. El número de incógnitas de ángulos de giro es:

$$n_n = 4(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$$

Elaboramos el esquema del pórtico con rótulas (figura 9.24). Para asegurar que sea geométricamente invariable, será necesario incorporar dos apoyos adicionales, que impidan los probables desplazamientos horizontales Δ_1 y Δ_2 . En consecuencia, el número de desplazamientos lineales desconocidos es:

$$n_d = 2(\Delta_1, \Delta_2)$$

De esta manera, el grado de indeterminación por el método de desplazamientos es:

$$G.I. = n_n + n_d = 4 + 2 = 6$$

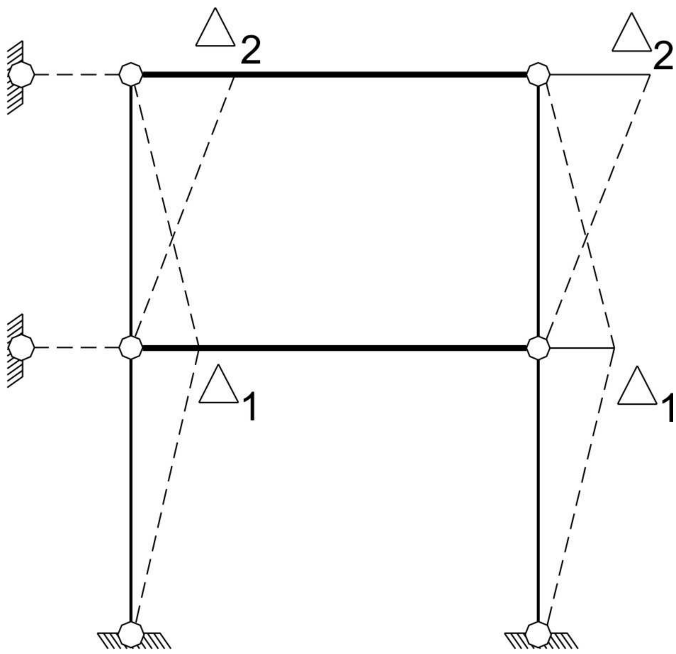


Fig. 9.24

El sistema principal del método de desplazamientos, que se obtiene incorporando empotramientos elásticos en los nudos rígidos del pórtico y los apoyos adicionales, que impiden los desplazamientos probables del pórtico (Δ_1, Δ_2), se muestra en la figura 9.25.

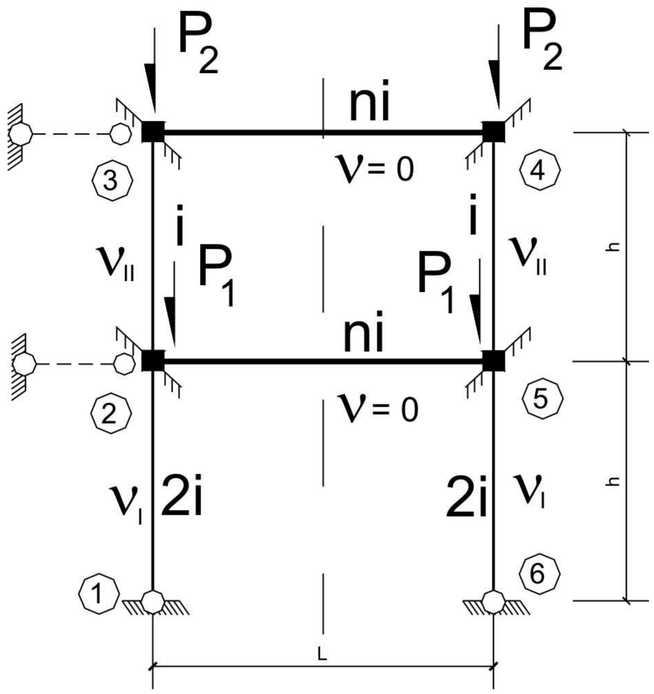


Fig. 9.25

2. PARAMETROS DE ESTABILIDAD

Para determinar los parámetros de estabilidad ν_{jk}, graficamos el diagrama de fuerza axial o normal en el esquema del pórtico con rótulas, en la cual se han incorporado los apoyos adicionales, que impiden el desplazamiento lateral (figura 9.26).

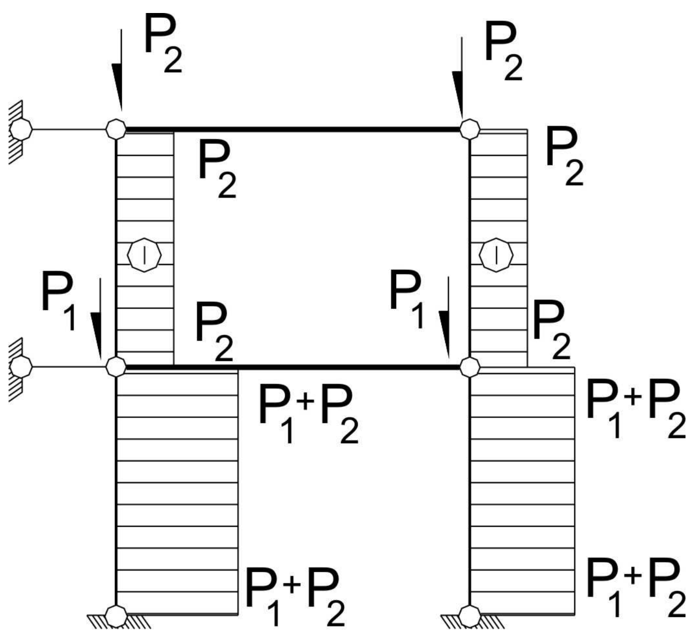


Fig. 9.26

Escribimos los valores de los parámetros:

$$\nu_{12} = \nu_{56} = \sqrt{\frac{N_{12}L_{12}}{i_{12}}} = \sqrt{\frac{(P_1 + P_2)h}{2i}} = \nu_I$$

$$\nu_{23} = \nu_{45} = \sqrt{\frac{N_{23}L_{23}}{i_{23}}} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \nu_{II}$$

$$\nu_{34} = \nu_{25} = 0$$

Un pórtico simétrico ante la acción de carga simétrica en el momento de pérdida de estabilidad, puede flexionarse en forma simétrica o antisimétrica. A cada forma de flexión, le corresponde su ecuación de estabilidad y su correspondiente carga crítica.

3. FORMA SIMETRICA DE PERDIDA DE ESTABILIDAD

La forma de deformación por flexión correspondiente a la forma simétrica de pérdida de estabilidad, también debe ser simétrica, esto es $\varphi_5 = -\varphi_2$, $\varphi_4 = -\varphi_3$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. De esta manera, el número total de incógnitas se reduce a:

$$N = 2(\varphi_2, \varphi_3)$$

SISTEMA DE ECUACIONES CANONICAS

Escribimos las ecuaciones del método de desplazamientos, que expresan la igualdad a cero de los momentos de reacción en los empotramientos elásticos adicionales, correspondientes a los nudos 2 y 3.

Primero analizamos el nudo 2, mostrando su equilibrio en la figura 9.27.

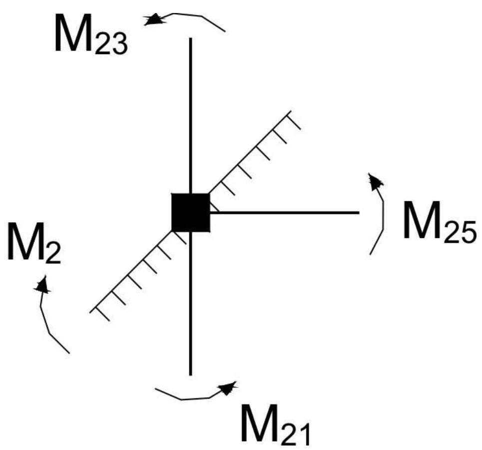


Fig. 9.27

$$M_2 = M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para el caso de la barra 2-1, tenemos que $\nu_{21} = \nu_I$

$$M_{21} = i_{21}\tilde{\alpha}_{21}(\varphi_2 - \psi_{21}) = 2i\tilde{\alpha}_I\varphi_2$$

Para la barra 2-3, tenemos que $\nu_{23} = \nu_{II}$

$$M_{23} = 2i_{23}\left[\alpha_{23}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 - (\alpha + \beta)_{23}\psi_{23}\right] = 2i\left[\alpha_{II}\varphi_2 + \beta_{II}\varphi_3\right]$$

Para el caso de la barra 2-5, tenemos que $\nu_{25} = 0$ y $N_{25} = 0$

$$M_{25} = 2i_{25}(2\varphi_2 + \varphi_5 - 3\psi_{25}) = 2ni(2\varphi_2 - \varphi_2) = 2ni\varphi_2$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (a) y obtenemos:

$$(2\tilde{\alpha}_I + 2\alpha_{II} + 2n)\varphi_2 + 2\beta_{II}\varphi_3 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Ahora, analizamos el nudo 3, mostrando su equilibrio en la figura 9.28.

NUDO 3

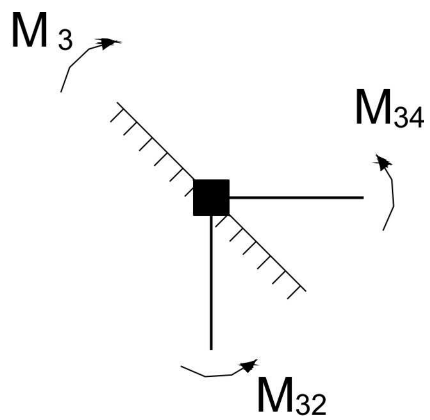


Fig. 9.28

$$M_3 = M_{32} + M_{34} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Para la barra 3-2, tenemos que $\nu_{32} = \nu_{II}$

$$M_{32} = 2i_{32}\left[\alpha_{32}\varphi_3 + \beta_{32}\varphi_2 - (\alpha + \beta)_{32}\psi_{32}\right] = 2i\left[\alpha_{II}\varphi_3 + \beta_{II}\varphi_2\right]$$

Para el caso de la barra 3-4, tenemos que $\nu_{34} = 0$ y $N_{34} = 0$

$$M_{34} = 2i_{34}(2\varphi_3 + \varphi_4 - 3\psi_{34}) = 2ni(2\varphi_3 - \varphi_3) = 2ni\varphi_3$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (c) y obtenemos:

$$2\beta_{II}\varphi_2 + (2\alpha_{II} + 2n)\varphi_3 = 0 \qquad \text{(d)}$$

De esta manera, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas φ_2 y φ_3, el cual después de dividirlo entre 2, quedará así:

$$(\tilde{\alpha}_I + \alpha_{II} + n)\varphi_2 + \beta_{II}\varphi_3 = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\beta_{II}\varphi_2 + (\alpha_{II} + n)\varphi_3 = 0$$

ECUACION DE ESTABILIDAD

La ecuación de estabilidad para la forma simétrica lo obtenemos, cuando igualamos a cero el determinante del sistema de ecuaciones (e).

$$D_S = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_I + \alpha_{II} + n & \beta_{II} \\ \beta_{II} & \alpha_{II} + n \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(f)}$$

DETERMINACION DE LA CARGA CRÍTICA

Para el valor dado de la relación entre las fuerzas externas $P_1 = 3P_2$, entre los parámetros ν surge la relación:

$$\nu_I = \nu_{12} = \nu_{56} = \sqrt{\frac{4P_2h}{2i}} = 1{,}414\sqrt{\frac{P_2h}{i}} = 1{,}414\nu_{II}$$

$$\nu_{II} = \nu_{23} = \nu_{45} = \sqrt{\frac{P_2h}{i}}$$

El valor crítico de las cargas se determina resolviendo la ecuación (f), reemplazando $n = 1$.

$$D_S = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_I + \alpha_{II} + 1 & \beta_{II} \\ \beta_{II} & \alpha_{II} + 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(g)}$$

Las incógnitas son los parámetros ν_I y ν_{II}, que están dentro de los coeficientes $\tilde{\alpha}_I$, α_{II}, β_{II}. Resolvemos la ecuación (g), recordando que los parámetros están relacionados entre sí por la relación $\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$. Si asumimos valores para el parámetro ν_{II} igual a 0; 0,8; 1,6 y así sucesivamente, calcularemos el valor de $D_S(\nu_{II})$. Por ejemplo, para el valor de $\nu_{II} = 0$ tenemos:

$$\nu_I = 1{,}414\nu_{II} = 0$$

Por la tabla 2 del anexo, determinamos los valores de los coeficientes para los parámetros, los cuales en este caso serán:

$$\tilde{\alpha}_I = 3, \qquad \alpha_{II} = 2, \qquad \beta_{II} = 1$$

Si reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (g) tendremos:

$$D_S(0) = \begin{vmatrix} 3+2+1 & 1 \\ 1 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

Los resultados de los cálculos se muestran en la tabla 9.7.

Tabla 9.7

ν_{II}	α_{II}	β_{II}	$\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$	$\tilde{\alpha}_I$	D_S
0	2	1	0	3	17
0,8	1,957	1,011	1,13	2,734	15,806
1,6	1,823	1,046	2,26	1,784	11,911
2,4	1,583	1,116	3,39	-0,932	3,019
2,5	1,544	1,129	3,54	-1,704	0,862
2,6	1,503	1,142	3,68	-2,637	-1,640

Obtenemos el valor exacto del parámetro, a través de la interpolación lineal:

$$\nu_{II,cr} = 2{,}5 + \frac{0{,}862}{0{,}862 + 1{,}640}(2{,}6 - 2{,}5) = 2{,}534$$

Los valores correspondientes de las cargas críticas serán:

$$P_2 = \frac{\nu_{II}^2 . i}{h} = \frac{2{,}534^2 . i}{h} = 6{,}421\frac{i}{h}$$

$$P_1 = 3P_2 = 19{,}263\frac{i}{h}$$

4. FORMA ANTISIMETRICA DE PERDIDA DE ESTABILIDAD

En este caso, las deformaciones de flexión deben de ser antisimétricas, esto es $\varphi_5 = \varphi_2$, $\varphi_4 = \varphi_3$. De esta manera, el grado de indeterminación es:

$$G.I. = n_n + n_d = 4(\varphi_2, \varphi_3, \Delta_1, \Delta_2)$$

El número de incógnitas se puede disminuir, basado en la condición que en pórticos simétricos con dos columnas, en el caso de flexión antisimétrica, las fuerzas cortantes en las columnas serán iguales a cero. Esto nos da la posibilidad de no incluir los desplazamientos lineales Δ_1 y Δ_2 como incógnitas principales, lo que no quiere decir, que los desplazamientos lineales indicados deben de ser iguales a cero. De esta manera, el número final de incógnitas principales es:

$$N = 2(\varphi_2, \varphi_3)$$

SISTEMA DE ECUACIONES CANONICAS

Elaboramos las ecuaciones del método de desplazamientos para el pórtico flexo-comprimido, considerando que $V_{12} = V_{23} = V_{45} = V_{56} = 0$.

Analizamos el nudo 2, mostrando para ello su equilibrio en la figura 9.29.

NUDO 2

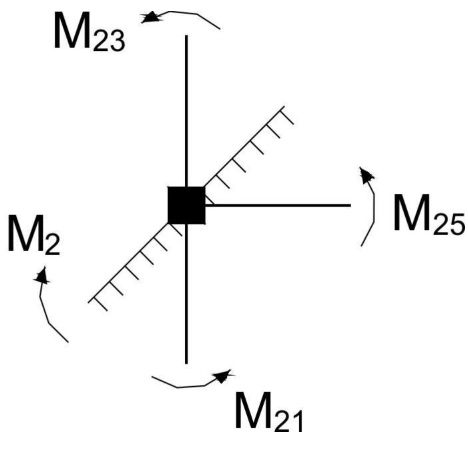


Fig. 9.29

$$M_2 = M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0 \qquad \text{(h)}$$

Para la barra 2-1 tenemos que $\nu_{21} = \nu_I$ y $V_{21} = 0$

$$M_{21} = -i_{21}(\nu tg\nu)_{21}\varphi_2 = -2i(\nu tg\nu)_I \varphi_2$$

Para el caso de la barra 2-3, tenemos que $\nu_{23} = \nu_{II}$ y $V_{23} = 0$

$$M_{23}=i_{23}\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{23}\varphi_2-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{23}\varphi_3\right]=i\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}\varphi_2-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_3\right]$$

En el caso de la barra 2-5, se tendrá que $\nu_{25}=0$

$$M_{25}=2i_{25}(2\varphi_2+\varphi_5-3\psi_{25})=2ni(2\varphi_2+\varphi_2)=6ni\varphi_2$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (h) y obtenemos:

$$\left[6n+\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}-2(\nu tg\nu)_I\right]\varphi_2-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_3=0 \qquad \text{(i)}$$

Ahora analizamos el nudo 3, mostrando su equilibrio en la figura 9.30

NUDO 3

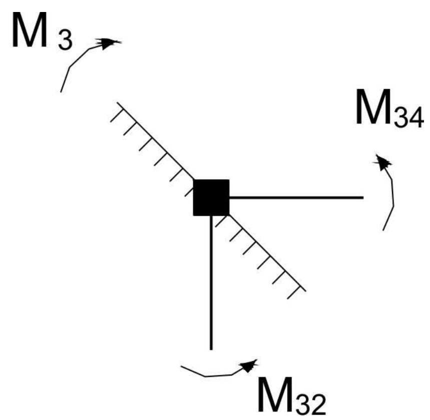


Fig. 9.30

$$M_3=M_{32}+M_{34}=0 \qquad \text{(j)}$$

Para la barra 3-2, tenemos que $\nu_{32}=\nu_{II}$ y $V_{32}=0$

$$M_{32}=i_{32}\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{32}\varphi_3-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{32}\varphi_2\right]=i\left[\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}\varphi_3-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_2\right]$$

Para el caso de la barra 3-4, tenemos que $\nu_{34}=0$

$$M_{34}=2i_{34}(2\varphi_3+\varphi_4-3\psi_{34})=2ni(2\varphi_3+\varphi_3)=6ni\varphi_3$$

Reemplazamos los valores en la ecuación (j) y obtenemos:

$$-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_2+\left[6n+\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}\right]\varphi_3=0 \qquad \text{(k)}$$

De esta manera, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas φ_2 y φ_3:

$$\left[6n+\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}-2(\nu tg\nu)_I\right]\varphi_2-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_3=0 \qquad \text{(l)}$$

$$-\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}\varphi_2+\left[6n+\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}\right]\varphi_3=0$$

ECUACION DE ESTABILIDAD

La ecuación de estabilidad para la forma antisimétrica de pérdida de estabilidad, lo obtenemos igualando a cero el determinante del sistema de ecuaciones (l):

$$D_A = \begin{vmatrix} 6n + \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} - 2(\nu tg\nu)_I & -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} \\ -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} & 6n + \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(m)}$$

DETERMINACION DE LA CARGA CRÍTICA

Reemplazamos $n = 1$ en la ecuación (m), obteniendo:

$$D_A = \begin{vmatrix} 6 + \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} - 2(\nu tg\nu)_I & -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} \\ -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} & 6 + \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(n)}$$

Resolvemos la ecuación (n), reemplazando valores para ν_{II} y teniendo en cuenta que entre ν_I y ν_{II} existe la dependencia $\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$. Los resultados del cálculo se muestran en la tabla 9.8.

Tabla 9.8

ν_{II}	$\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}$	$\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}$	$\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$	$(\nu tg\nu)_I$	D_A
0	1	1	0	0	48
0,4	0,946	1,027	0,56	0,355	42,260
0,8	0,777	1,115	1,13	2,438	11,640
0,9	0,714	1,149	1,27	4,204	-12,694

Obtenemos el valor exacto del parámetro, a través de la interpolación lineal:

$$\nu_{II,cr} = 0{,}8 + \frac{11{,}640}{11{,}640 + 12{,}694}(0{,}9 - 0{,}8) = 0{,}848$$

En consecuencia, los correspondientes valores de las cargas críticas serán:

$$P_2 = \frac{\nu_{II}^2 .i}{h} = \frac{0{,}848^2 .i}{h} = 0{,}719\frac{i}{h}$$

$$P_1 = 3P_2 = 2{,}157\frac{i}{h}$$

5. FORMA MAS PELIGROSA DE PERDIDA DE ESTABILIDAD

De esta manera, la forma antisimétrica de pérdida de estabilidad tiene la menor carga crítica. En consecuencia, para tal tipo de pórtico, la forma más peligrosa de pérdida de estabilidad es la antisimétrica y sus valores de cargas críticas son:

$$P_{1,cr} = 2{,}157\frac{i}{h}$$

$$P_{2,cr} = 0{,}719\frac{i}{h}$$

En lo sucesivo, las investigaciones, las realizaremos solo para la forma antisimétrica de pérdida de estabilidad, por ser la más peligrosa.

6. INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DE LA VIGA EN LA MAGNITUD DE LA CARGA CRITICA

Por cuanto, la relación entre las cargas sigue siendo la misma, esto es $P_1 = 3P_2$, la dependencia $\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$ se conserva y el determinante (m) es una función de dos variables.

$$D_A(\nu_{II}, n) = 0 \qquad \text{(o)}$$

Para graficar la dependencia $\nu_{II} = f(n)$, determinamos los límites de variación de las variables. Como el coeficiente n varía en el intervalo $0 \le n \le \infty$, determinamos sus correspondientes límites del parámetro ν_{II}.

Cuando $n = 0$, la viga no puede trabajar en flexión, lo que corresponde al esquema de incorporación de rótulas en los extremos de las vigas 3-4 y 2-5 (figura 9.31).

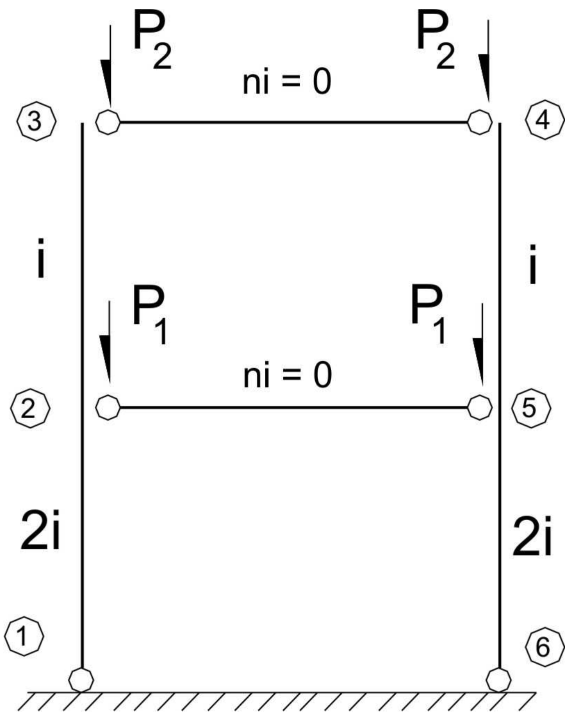


Fig. 9.31

El parámetro crítico ν_{II} se puede determinar a partir de la ecuación (m), reemplazando $n = 0$.

$$D_A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} - 2(\nu tg\nu)_I & -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} \\ -\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} & \left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(p)}$$

Para el valor de $\nu_{II} = 0$, tenemos que $\nu_{23} = \nu_{II} = 0$ y $\nu_{12} = 1{,}414\nu_{II} = 0$. Por la tabla 2 del anexo, determinamos los valores de sus coeficientes:

$$\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}=1; \qquad \left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}=1; \qquad (\nu tg\nu)_{I}=0$$

De esta manera, el determinante será:

$$D_A=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

En consecuencia, el parámetro crítico $\nu_{II,cr}=0$ y sus correspondientes cargas críticas $P_1=0$, $P_2=0$, lo que implica que en el pórtico dado, sus vigas no trabajan en flexión y es geométricamente inestable. Esto se debe a que los dos discos 1-2-3 y 4-5-6 están unidos por tres barras, dos reales 3-4, 2-5 y una barra ficticia 1-6, las cuales son paralelas (figura 9.31), lo que corresponde a uno de los principios de inestabilidad geométrica.

Cuando $n=\infty$, la viga se convierte en un cuerpo absolutamente rígido, que no permite deformaciones de flexión (figura 9.32). De esta manera, se tendrá que $\varphi_2=\varphi_3=0$, por lo cual, las columnas de los pisos superior e inferior se flexionan en forma independiente y, en consecuencia, el pórtico puede perder su estabilidad, como resultado de la aparición de las deformaciones en flexión de las columnas del piso superior o del piso inferior. En ambos casos, las deformaciones de flexión del pórtico será antisimétrico y, como consecuencia, las fuerzas cortantes en las columnas serán iguales a cero, lo que se puede utilizar para determinar los parámetros críticos.

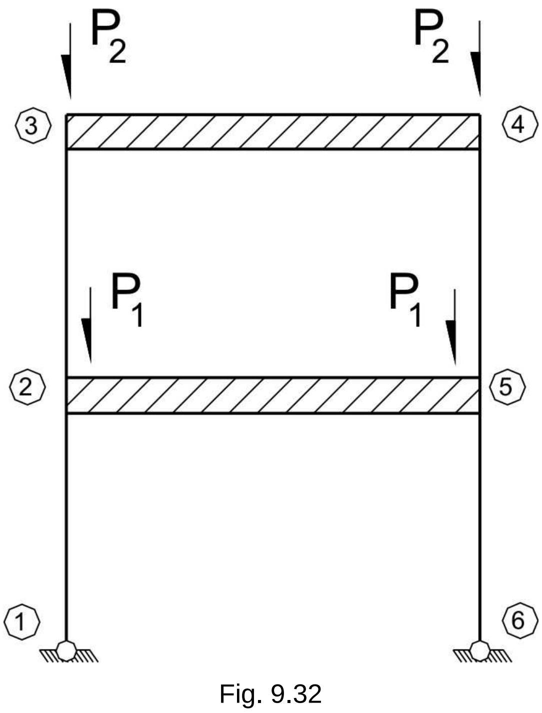


Fig. 9.32

De esta manera, escribimos la ecuación para las fuerzas cortantes en la columna 2-3 del piso superior, la cual tiene la forma:

$$V_{32}=-\frac{2i_{32}}{L_{32}}\left[(\alpha+\beta)_{32}(\varphi_3+\varphi_2)-\gamma_{32}\psi_{32}\right]=0 \qquad \text{(q)}$$

Considerando, que $\varphi_2=\varphi_3=0$, obtenemos:

$$\gamma_{32}\psi_{32} = 0$$

En consecuencia, se tendrá que $\gamma_{32} = 0$. Por la tabla 2 del anexo, determinamos su correspondiente valor del parámetro crítico $\nu_{32} = 3{,}14$.

De esta manera:

$$\nu_{II} = \nu_{23} = 3{,}14$$

$$\nu_{I} = 1{,}414\nu_{II} = 4{,}44$$

Ahora analizamos la expresión para la fuerza cortante en la columna 1-2 del piso inferior y lo igualamos a cero, obteniendo:

$$V_{21} = -\frac{i_{21}}{L_{21}}(\tilde{\alpha}_{21}\varphi_2 - \tilde{\gamma}_{21}\psi_{21}) = 0 \qquad \text{(r)}$$

Como $\varphi_2 = 0$, tenemos:

$$\tilde{\gamma}_{21}\psi_{21} = 0$$

Por lo tanto, se tendrá que $\tilde{\gamma}_{21} = 0$. Por la tabla 2 del anexo, determinamos su correspondiente valor del parámetro crítico $\nu_{21} = 1{,}57$.

De esta manera:

$$\nu_{I} = \nu_{21} = 1{,}57$$

$$\nu_{II} = \frac{\nu_I}{1{,}414} = 1{,}11$$

Finalmente, tenemos que:

$$\nu_{I} = \nu_{I,\text{mín}} = 1{,}57$$

$$\nu_{II} = \nu_{II,\text{mín}} = 1{,}11$$

De esta manera, el pórtico dado, pierde la estabilidad, como consecuencia de la flexión de la columna del primer piso (figura 9.33).

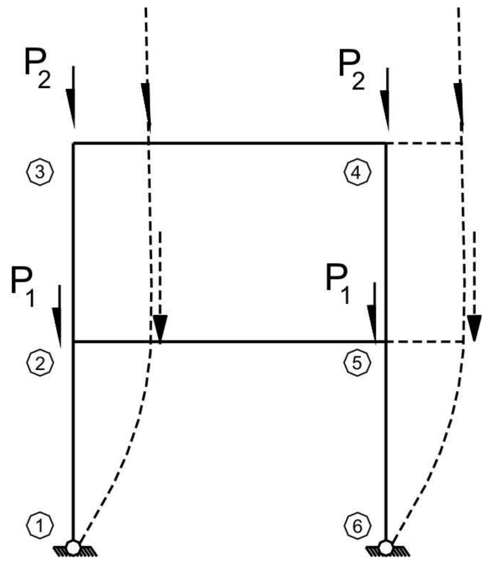


Fig. 9.33

Determinamos los puntos intermedios del gráfico $\nu_{II} = f(n)$, asumiendo ciertos valores para el parámetro ν_{II} en el intervalo de 0 a 1,11 y determinamos su correspondiente valor de n a partir de la ecuación (m). Los resultados se muestran en la tabla 9.9 y el gráfico $\nu_{II} = f(n)$ en la figura 9.34.

Tabla 9.9

ν_{II}	$\nu_{23} = \nu_{II}$	$\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}$	$\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}$	$\nu_I = 1{,}414\nu_{II}$	$(\nu tg\nu)_I$	n
0	-	-	-	-	-	0
0,6	0,6	0,877	1,063	0,85	0,979	0,26
0,848	-	-	-	-	-	1
1,0	1,0	0,642	1,188	1,41	9,421	3,05
1,11	-	-	-	-	-	∞

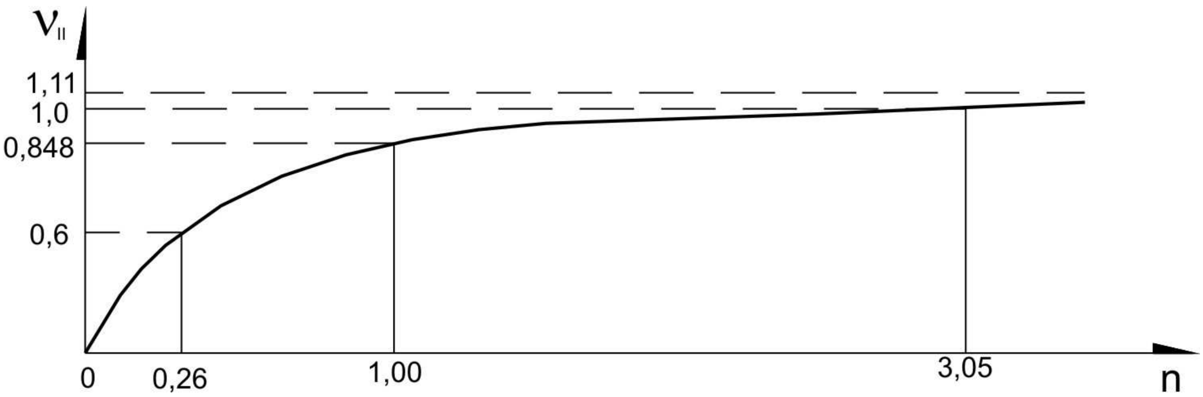


Fig. 9.34

7. INFLUENCIA MUTUA DE LAS CARGAS CRITICAS P_1 Y P_2

La ecuación de estabilidad (n) cuando $n = 1$, expresa la investigación requerida.

$$D_A(\nu_I, \nu_{II}) = 0$$

Determinamos los límites de variación de las variables $\nu_{I,cr}$ y $\nu_{II,cr}$.

Cuando $P_1 = 0$ de las expresiones de los parámetros de estabilidad tenemos:

$$\nu_I = \sqrt{\frac{P_2 h}{2i}} = 0{,}707\nu_{II}$$

$$\nu_{23} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \nu_{II}$$

Resolvemos la ecuación (n), eligiendo los valores del parámetro ν_{II}. Los cálculos los ingresamos en la tabla 9.10.

Tabla 9.10

ν_{II}	$\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}$	$\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}$	$\nu_I = 0,707\nu_{II}$	$(\nu tg\nu)_I$	D_A
0	1	1	0	0	48
0,4	0,946	1,027	0,28	0,082	46,053
0,8	0,777	1,115	0,56	0,355	39,873
1,2	0,466	1,287	0,85	0,979	27,492
1,6	-0,047	1,601	1,13	2,438	3,848
1,7	-0,221	1,714	1,20	3,086	-5,209

Obtenemos el valor exacto del parámetro, a través de la interpolación lineal:

$$\nu_{II,cr} = 1,6 + \frac{3,848}{3,848 + 5,209}(1,7 - 1,6) = 1,642$$

$$\nu_{I,cr} = 0,707.1,642 = 1,161$$

Determinamos la carga crítica:

$$P_{2,cr} = \frac{\nu_{II,cr}^2 .i}{h} = 1,642^2 \frac{i}{h} = 2,696\frac{i}{h}$$

En el caso que $P_2 = 0$, determinamos el valor de la carga crítica P_1.

De las expresiones de los parámetros de estabilidad tenemos:

$$\nu_{12} = \sqrt{\frac{P_1 h}{2i}} = \nu_I$$

$$\nu_{23} = \nu_{II} = 0$$

De acuerdo a la tabla 2 del anexo, tenemos que $\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II} = 1$ y $\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II} = 1$

La ecuación de estabilidad (n) tiene la forma:

$$D_A = \begin{vmatrix} 7 - 2(\nu tg\nu)_I & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante, tenemos:

$$(\nu tg\nu)_I = 3,428$$

A través de la tabla 2 del anexo, determinamos el correspondiente valor del parámetro $\nu_I = 1,221$. La magnitud de la carga crítica será:

$$P_{1,cr} = \frac{\nu_{I,cr}^2 .2i}{h} = \frac{1,221^2 .2i}{h} = 2,982\frac{i}{h}$$

Asumiendo varios valores del parámetro ν_{II} y resolviendo la ecuación (n), obtenemos el parámetro crítico ν_I. Las magnitudes de las cargas P_1 y P_2 se determinarán por las expresiones:

$$P_2 = \frac{\nu_{II}^2 . i}{h}$$

$$P_1 = \frac{\nu_I^2 . 2i}{h} - P_2$$

Los resultados se muestran en la tabla 9.11 y el gráfico $P_1 = f(P_2)$ se muestra en la figura 9.35.

Tabla 9.11

P_2	ν_{II}	$\nu_{23} = \nu_{II}$	$\left(\frac{\nu}{tg\nu}\right)_{II}$	$\left(\frac{\nu}{sen\nu}\right)_{II}$	$(\nu tg\nu)_I$	$\nu_I = \nu_{12}$	P_1
0	0	-	-	-	-	1,221	2,982
0,64	0,8	0,8	0,777	1,115	3,297	1,213	2,303
1,44	1,2	1,2	0,466	1,287	3,105	1,201	1,445
2,25	1,5	1,5	0,106	1,504	2,868	1,176	0,516
2,696	1,642	-	-	-	-	1,161	0

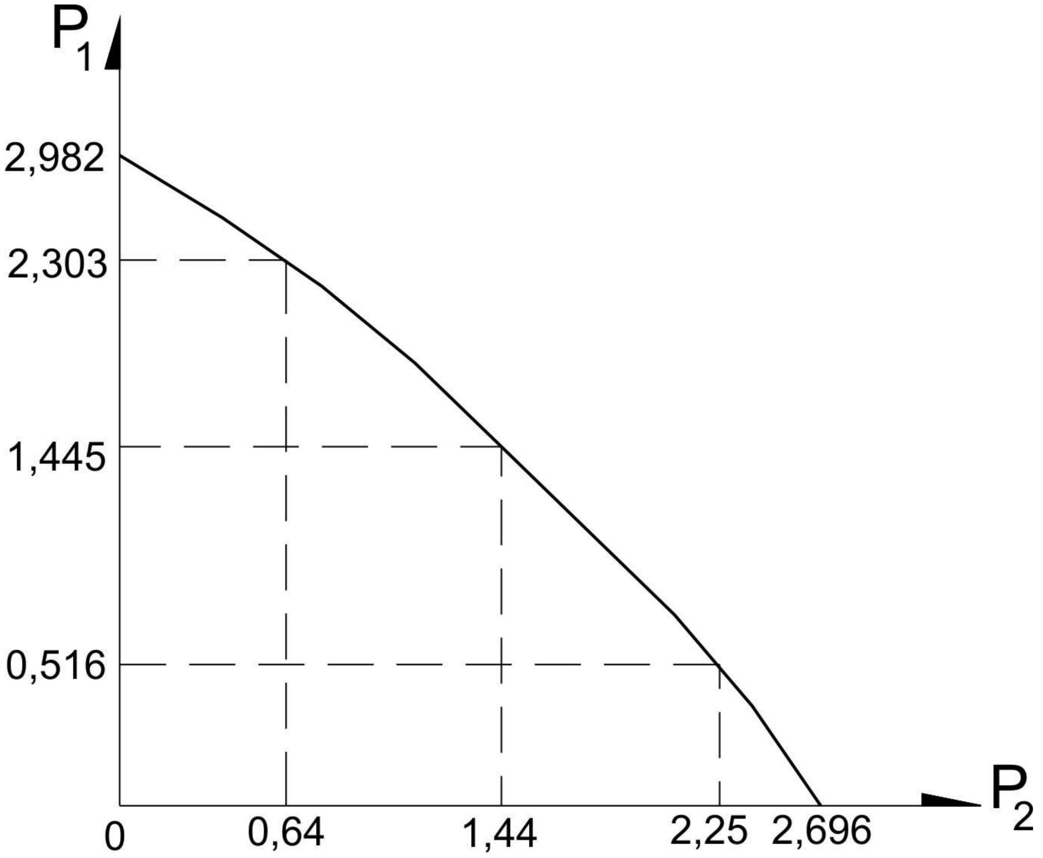


Fig. 9.35

CAPITULO 10

DINAMICA ESTRUCTURAL

10.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Diversas estructuras están sometidas a cargas externas, que varían durante el tiempo con cierta velocidad. A tal tipo de cargas, se les denomina *dinámicas*, pudiendo ser producto de la acción del viento, vibración de maquinarias, detonaciones, sismos y otros. En todos los casos, las masas de los cuerpos ubicados en la construcción y las masas de la misma estructura, se moverán, surgiendo como consecuencia las fuerzas inerciales, las cuales son necesarias considerarlo en el cálculo al mismo tiempo que las fuerzas perturbadoras externas.

Como base del cálculo dinámico estructural, se usa el principio de D'Alambert, por el cual en cualquier momento del tiempo, en cada masa del sistema, excepto las cargas externas e internas, se aplicarán las correspondientes fuerzas inerciales, debiendo estar el sistema estructural en equilibrio.

El cálculo dinámico estructural se basa en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento de las masas, cuyo número es igual al número de grados de libertad dinámicos. Se entiende por *grados de libertad dinámicos*, al número de parámetros desconocidos, que determinan la ubicación de las masas del sistema ante todas las probables deformaciones elásticas de sus elementos. Este número puede ser determinado por la mínima cantidad de conexiones adicionales, que son necesarias ingresarlo al sistema para fijar todas las masas.

Para estructuras con n grados de libertad dinámicos, el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento de las masas tiene la forma:

$$\begin{aligned}
(\overline{m}_1\delta_{11}\ddot{y}_1 + y_1) + \overline{m}_2\delta_{12}\ddot{y}_2 + ... + \overline{m}_n\delta_{1n}\ddot{y}_n &= \delta_{1P}P(t) \\
\overline{m}_1\delta_{21}\ddot{y}_1 + (\overline{m}_2\delta_{22}\ddot{y}_2 + y_2) + ... + \overline{m}_n\delta_{2n}\ddot{y}_n &= \delta_{2P}P(t) \qquad (10.1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{m}_1\delta_{n1}\ddot{y}_1 + \overline{m}_2\delta_{n2}\ddot{y}_2 + ... + (\overline{m}_n\delta_{nn}\ddot{y}_n + y_n) &= \delta_{nP}P(t)
\end{aligned}$$

Donde:

y_i - desplazamiento probable de la masa del sistema

$\overline{m}_i$ - masa, que se desplaza en la dirección de y_i

δ_{kj} - desplazamiento y_k debido a la acción de la carga unitaria en la dirección de y_i

$P(t)$ - carga perturbadora

El cálculo dinámico del sistema estructural, consiste en el análisis de dos etapas.

En la primera etapa se efectúa el cálculo de las vibraciones libres, que tiene por finalidad obtener las frecuencias y formas de vibración libre. Para ello, la parte derecha del sistema de ecuaciones 10.1 se iguala a cero, teniendo la solución la forma de la ecuación 10.2.

$$y_i = a_i \text{sen}(\omega t + \varphi) \qquad (10.2)$$

Donde:

a_i - amplitud del desplazamiento

ω - frecuencia circular

φ - fase inicial de la vibración

Al reemplazar la ecuación 10.2 en las ecuaciones diferenciales 10.1, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales homogéneas respecto a las amplitudes desconocidas.

$$\begin{aligned} (k_{11}-\lambda)a_1 + k_{12}a_2 + \dots\dots\dots + k_{1n}a_n &= 0 \\ k_{21}a_1 + (k_{22}-\lambda)a_2 + \dots\dots\dots + k_{2n}a_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \dots\dots\dots + (k_{nn}-\lambda)a_n &= 0 \end{aligned} \qquad (10.3)$$

Donde:

$$k_{ij} = \overline{m}_j \delta_{ij} \qquad (10.4)$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

El sistema de ecuaciones 10.3 puede tener dos soluciones:

1. Todas las amplitudes $a_i = 0$. El sentido físico de esta solución trivial es la ausencia de los desplazamientos de las masas y, en consecuencia, la ausencia de vibraciones.
2. La amplitud $a_i \neq 0$. Esto puede ser posible cuando el determinante del sistema de ecuaciones 10.3 es igual a cero.

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} k_{11}-\lambda & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22}-\lambda & \dots & k_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (10.5)$$

Al desarrollar el determinante, obtenemos la ecuación algebraica de grado n respecto a la magnitud desconocida λ.

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots\dots\dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \qquad (10.6)$$

Donde:

$b_i\,(i = 1,2,\dots\dots,n)$ - coeficiente numérico.

La ecuación 10.5 expresa la condición de existencia del proceso de vibración, cuya solución por medio del álgebra lineal es equivalente al problema de valores propios de la matriz K.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \qquad (10.7)$$

Los números λ que solucionan la ecuación 10.5 o lo que es lo mismo la ecuación 10.6, se llaman valores propios de la matriz K. Su cantidad es igual al orden de la matriz. Los valores propios tienen las siguientes propiedades:

a) La suma de los valores propios es igual a la suma de los coeficientes principales de la matriz K.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = Sp\|K\| \qquad (10.8)$$

b) El producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz K.

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = Det\|K\| \qquad (10.9)$$

A cada valor propio λ_j le corresponde cierto valor de las incógnitas $a_{ij} (i = 1,2,.....,n)$, llamado vector propio A_j.

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ..... \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad (10.10)$$

Cada valor propio y su correspondiente vector propio, tienen la propiedad:

$$K.A_j = \lambda_j.A_j \qquad (10.11)$$

En los problemas de la dinámica estructural, todos los valores propios son números naturales y positivos. La cantidad de valores propios es igual al grado de libertad dinámico, correspondiéndole a cada valor propio $\lambda_j (j = 1,2,.....,n)$ un determinado valor de frecuencia circular y la elección de la amplitud $a_{ij} (i = 1,2,.....,n)$, que determinan la forma de vibración correspondiente a la frecuencia dada.

$$\omega_j = +\sqrt{\frac{1}{\lambda_j}} \qquad (10.12)$$

Todas las frecuencias tienen valores crecientes, esto es $\omega_1 < \omega_2 <.....< \omega_n$, formándose el espectro de frecuencias del sistema dado. El menor valor de la frecuencia ω_1 se llama *frecuencia de la vibración principal*.

Las amplitudes de dos diferentes formas de vibración, poseen la propiedad de ortogonalidad:

$$\sum_{i=1,2,...}^{n} \overline{m}_i a_{ij} a_{ik} = 0 \qquad (10.13)$$

Donde:

j, k - números de las dos formas principales de vibración.

La segunda etapa del cálculo dinámico, consiste en el cálculo del sistema estructural ante las vibraciones forzadas, cuya finalidad es determinar las fuerzas y desplazamientos, que se producen como consecuencia de la acción de las cargas dinámicas externas.

$$P(t) = P_0 sen\theta t \qquad (10.14)$$

Si la carga dinámica es vibracional del tipo de la ecuación 10.14, entonces la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (ecuación 10.1), tendrá la forma de la ecuación 10.15, que corresponde al proceso de vibración indicado.

$$y_i = A_i \operatorname{sen}\theta t \tag{10.15}$$

Si reemplazamos la ecuación 10.15 en el sistema de ecuaciones diferenciales 10.1, se tendrá un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

$$\begin{gathered}
\left(\delta_{11} - \frac{1}{\overline{m}_1\theta^2}\right)B_1 + \delta_{12}B_2 + ... + \delta_{1n}B_n + \delta_{1P}P_0 = 0 \\
\delta_{21}B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\overline{m}_2\theta^2}\right)B_2 + ... + \delta_{2n}B_n + \delta_{2P}P_0 = 0 \\
.... \\
\delta_{n1}B_1 + \delta_{n2}B_2 + ... + \left(\delta_{nn} - \frac{1}{\overline{m}_n\theta^2}\right)B_n + \delta_{nP}P_0 = 0
\end{gathered} \tag{10.16}$$

Donde:

$B_i = \overline{m}_i\theta^2 A_i$ - valor de la amplitud de la fuerza de inercia, actuante en la dirección del desplazamiento y_i.

El valor de la amplitud de la fuerza inercial, se determina a partir de la ecuación 10.16, adicionándose al sistema con los valores de la amplitud de la fuerza perturbadora, después de lo cual, se determinarán las fuerzas internas. Para ello, se puede utilizar el método de sumatoria de acciones.

$$\begin{aligned}
M_{din} &= M_1B_1 + M_2B_2 + ... + M_nB_n + M_PP_0 \\
V_{din} &= V_1B_1 + V_2B_2 + ... + V_nB_n + V_PP_0 \\
N_{din} &= N_1B_1 + N_2B_2 + ... + N_nB_n + N_PP_0
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Donde:

$M_i,\ V_i,\ N_i$ - momento flector, fuerza cortante y fuerza axial, que surgen en la estructura, debido a la acción de la carga unitaria, actuante en la dirección y_i

$M_P,\ V_P,\ N_P$ - momento flector, fuerza cortante y fuerza axial, debido a la acción de la carga perturbadora unitaria $P_0 = 1$

Las amplitudes de los desplazamientos de las masas en vibraciones forzadas, se puede calcular por la fórmula 10.18.

$$A_i = \frac{B_i}{\overline{m}_i\theta^2} \tag{10.18}$$

10.2 CALCULO DINAMICO DE PORTICO PLANO

En el esquema mostrado en la figura 10.1, se ubican dos masas puntuales $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. La carga externa es vibracional del tipo $P(t) = P_0 sen\theta t$, siendo $P_0 = 1,2kN$ y $\theta = 0,8\omega_1$. Se pide realizar el cálculo dinámico de vibraciones libres y forzadas del pórtico dado.

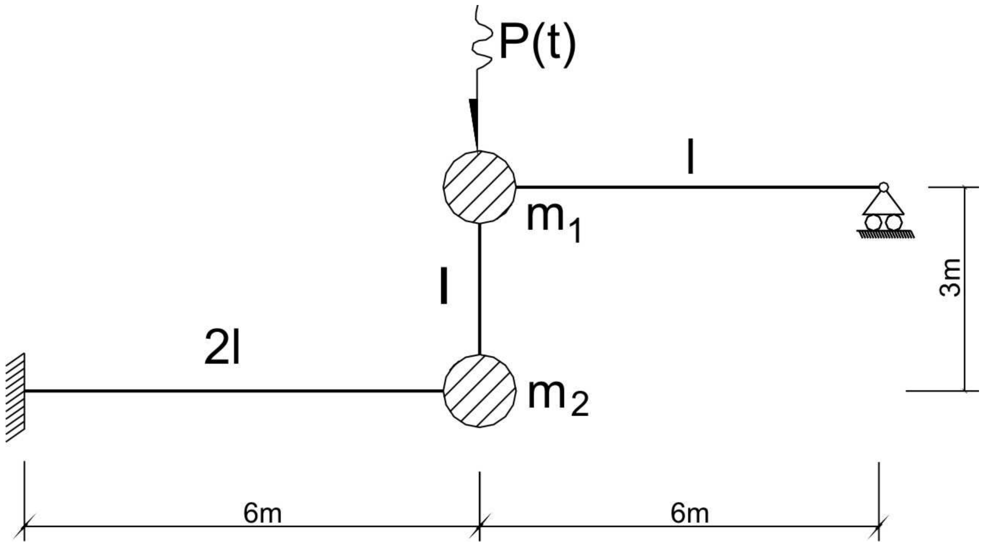


Fig. 10.1

CALCULO DE VIBRACIONES LIBRES

Los probables desplazamientos de las masas del sistema se muestran en la figura 10.2. El desplazamiento horizontal de la masa m_2 se asume que es igual a cero, por cuanto en flexión, la deformación longitudinal de la barra del pórtico se puede despreciar.

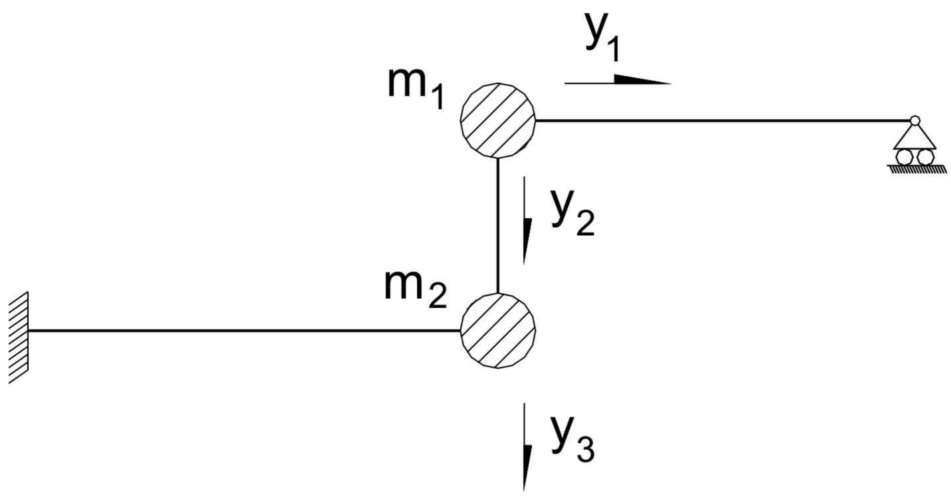


Fig. 10.2

Para fijar las masas del sistema, es suficiente incorporar dos apoyos adicionales (figura 10.3). Se impide el desplazamiento vertical de ambas masas por medio de la barra adicional tipo apoyo S_2.

Los desplazamientos y_2 e y_3 son lineales y dependientes el uno del otro; por ello, se tendrá que $y_2 = y_3$. De esta manera el pórtico dado tiene dos grados de libertad dinámicos.

$$n_{din} = 2$$

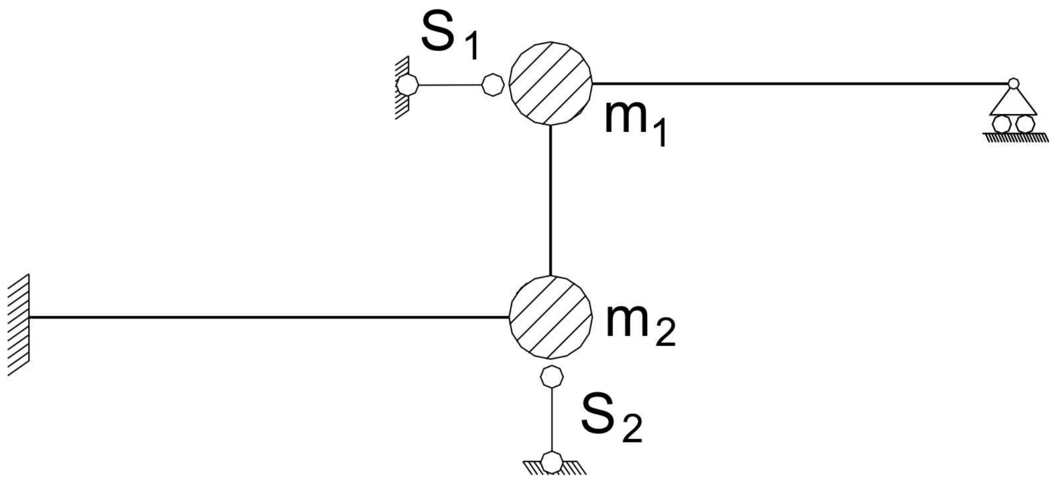


Fig. 10.3

Escribimos las masas, las cuales se pueden desplazar en las direcciones de y_1 e y_2:

$$\overline{m}_1 = m_1 = m \qquad \text{(a)}$$

$$\overline{m}_2 = m_1 + m_2 = m + 2m = 3m$$

El sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento tendrá la forma:

$$(m\delta_{11}\ddot{y}_1 + y_1) + 3m\delta_{12}\ddot{y}_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$m\delta_{21}\ddot{y}_1 + (3m\delta_{22}\ddot{y}_2 + y_2) = 0$$

Su correspondiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales será:

$$(m\delta_{11} - \lambda)a_1 + 3m\delta_{12}a_2 = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$m\delta_{21}a_1 + (3m\delta_{22} - \lambda)a_2 = 0$$

Graficamos los diagramas de momento flector M_1 y M_2 debido a la acción de las cargas unitarias en las direcciones de los desplazamientos y_1 e y_2. Como el pórtico es una vez hiperestático, para su cálculo utilizamos el método de las fuerzas. El sistema principal y su diagrama unitario $\overline{M}_1$ debido a la acción de $X_1 = 1$ se muestra en la figura 10.4.

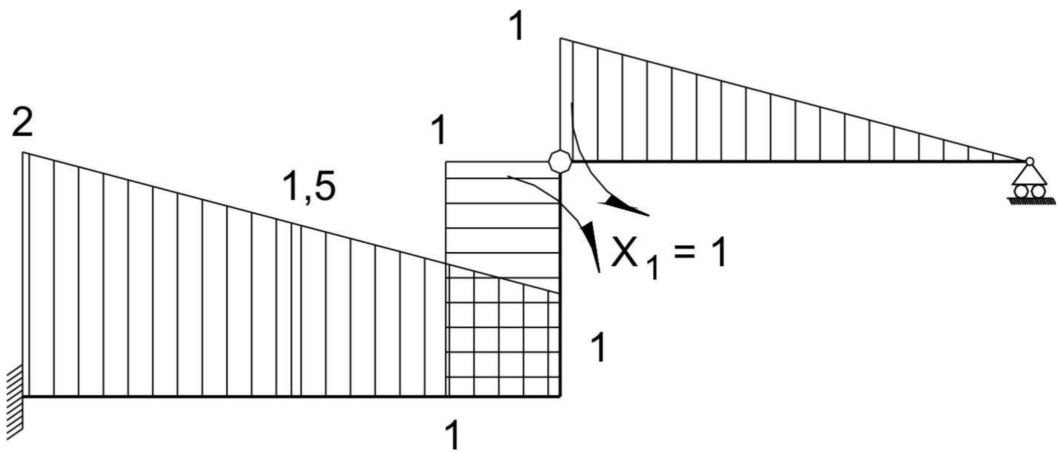


Fig. 10.4

La ecuación del método de las fuerzas es:

$$\delta'_{11}X_1 + \delta'_{1P} = 0 \qquad \text{(d)}$$

Nótese que los coeficientes de las ecuaciones (c) y (d) son diferentes.

Calculamos el coeficiente unitario δ'_{11}:

$$\delta'_{11} = \sum \int_L \frac{\overline{M}_1^2}{EI} ds = \frac{6}{6.2EI}(2^2 + 4.1{,}5^2 + 1^2) + \frac{1}{EI}.1.3.1 + \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.1.6.\frac{2}{3}.1 = \frac{12}{EI}$$

Los diagramas de carga M_{Pi} debido a la acción de cada fuerza, correspondiente a su estado de carga y los diagramas finales M_1 y M_2 se muestran en las figuras 10.5 y 10.6.

ESTADO 1

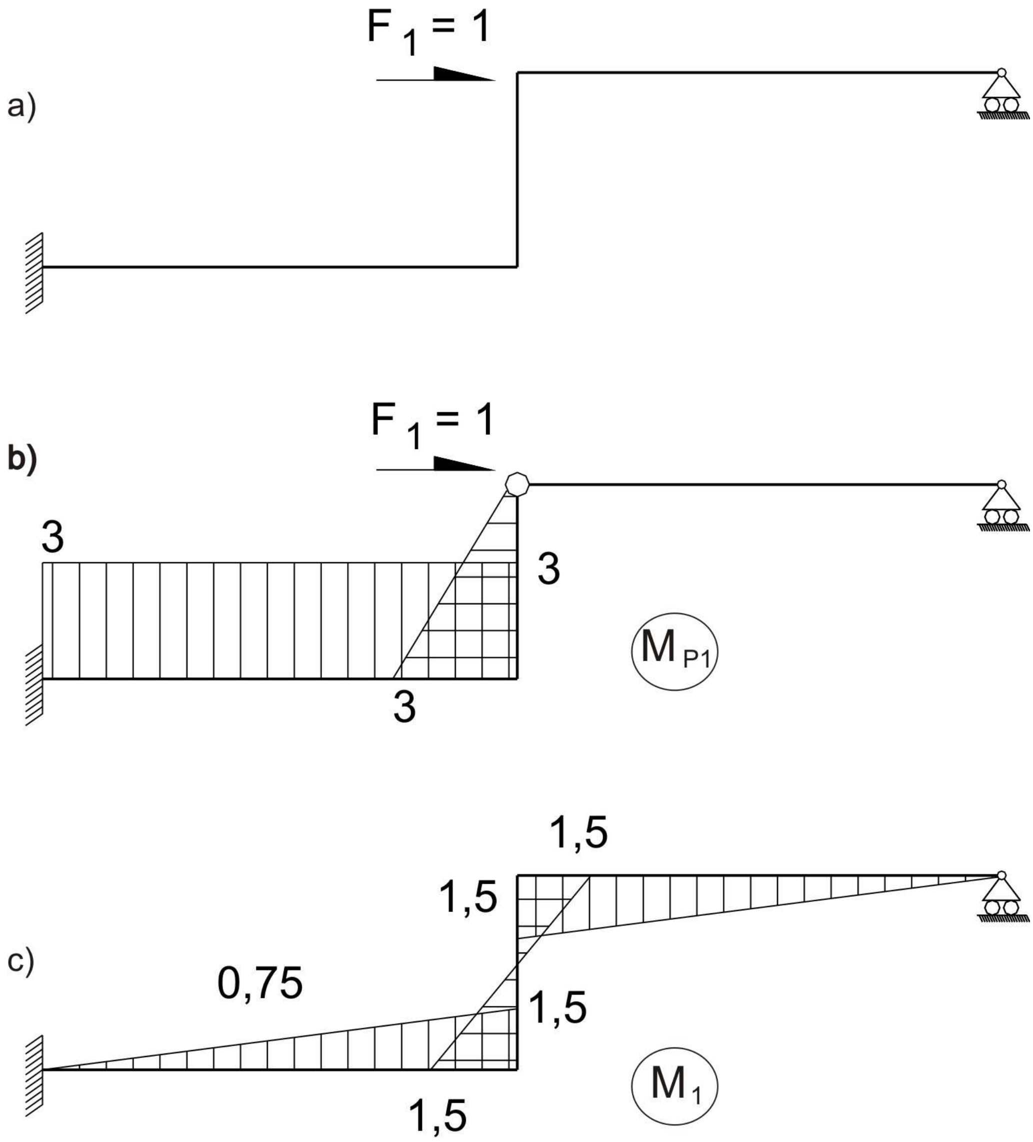


Fig. 10.5

Donde:

$$\delta'_{1P} = \frac{1}{2EI}.3.6.1{,}5 + \frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.3.3.1 = \frac{18}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{18}{12} = -1{,}5$$

ESTADO 2

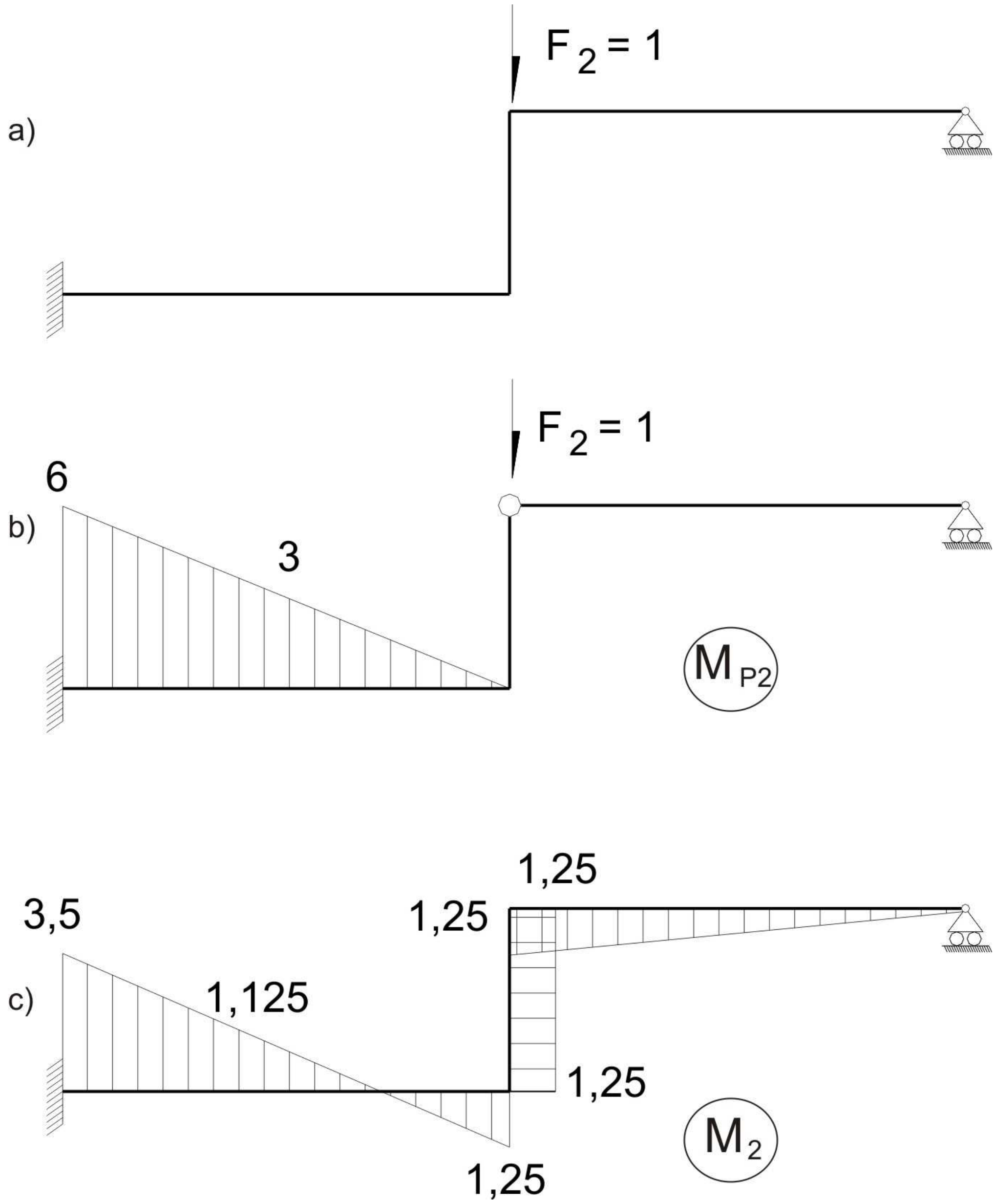


Fig. 10.6

Siendo:

$$\delta'_{1P} = \frac{6}{6.2EI}(6.2 + 4.3.1{,}5 + 0) = \frac{15}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{15}{12} = -1{,}25$$

Calculamos los coeficientes del sistema de ecuaciones (c). Estos coeficientes describen el desplazamiento en el pórtico y pueden ser calculados por la fórmula de Mohr.

$$\delta_{ij} = \sum \int_L \frac{M_i M_j}{EI} ds \qquad \text{(e)}$$

Como el pórtico dado es hiperestático, el cálculo de desplazamientos se puede simplificar, utilizando la igualdad (f), recomendándose utilizar la fórmula más sencilla.

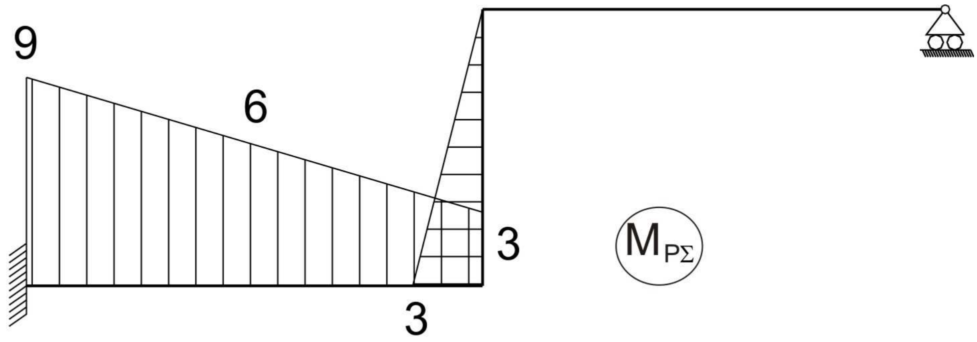
$$\delta_{ij} = \sum \int_L \frac{M_i M_j}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_{Pi} M_j}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_i M_{Pj}}{EI} ds \qquad \text{(f)}$$

$$\delta_{11} = \sum \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_{P1} M_1}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} .1{,}5.6.3 + \frac{3}{6EI}(0 + 0 + 3.1{,}5) = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{12} = \sum \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_{P1} M_2}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_1 M_{P2}}{EI} ds = \frac{6}{6.2EI}(0 + 4.0{,}75.3 + 0) = \frac{4{,}5}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum \int_L \frac{M_2 M_2}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_{P2} M_2}{EI} ds = \frac{6}{6.2EI}(6.3{,}5 + 4.3.1{,}125 + 0) = \frac{17{,}25}{EI}$$

a)



b)

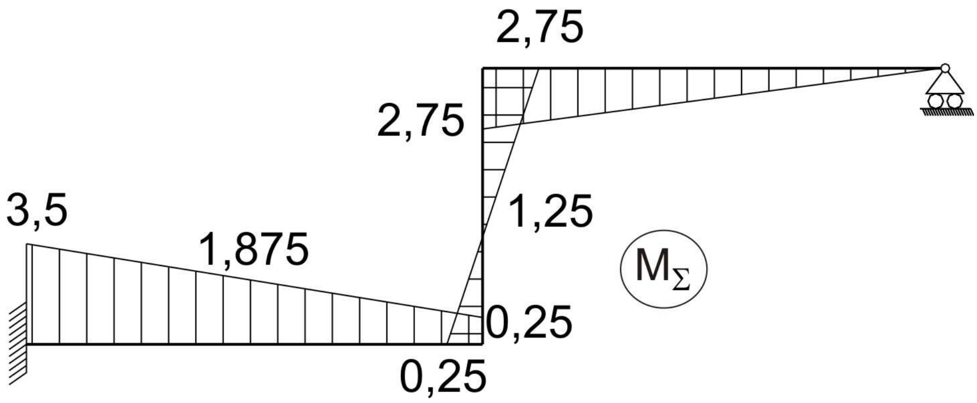


Fig. 10.7

Para verificar la veracidad del cálculo de los desplazamientos, graficamos la suma de los diagramas de carga $M_{P\Sigma}$ y la suma de los diagramas de los estados 1 y 2, es decir M_{Σ}, tal como se muestra en la figura 10.7 y lo calculamos a través de las fórmulas (g):

$$M_{P\Sigma} = M_{P1} + M_{P2} \qquad \text{(g)}$$

$$M_{\Sigma} = M_1 + M_2$$

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int_L \frac{M_1 M_{\Sigma}}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_{P1} M_{\Sigma}}{EI} ds = \sum \int_L \frac{M_1 M_{P\Sigma}}{EI} ds = \frac{6}{6.2EI}(0 + 4.0{,}75.6 + 1{,}5.3) +$$

$$+ \frac{3}{6EI}(1{,}5.3 + 0 + 0) = \frac{13{,}5}{EI}$$

$$\delta_{2\Sigma}=\sum\int_L \frac{M_2 M_\Sigma}{EI}ds=\sum\int_L \frac{M_2 M_{P\Sigma}}{EI}ds=\sum\int_L \frac{M_{P2} M_\Sigma}{EI}ds=\frac{6}{6.2EI}(6.3,5+4.3.1,875+0)=\frac{21,75}{EI}$$

La suma de los coeficientes de la primera fila es:

$$\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{9}{EI}+\frac{4,5}{EI}=\frac{13,5}{EI}=\delta_{1\Sigma}$$

La suma de los coeficientes de la segunda fila es:

$$\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{4,5}{EI}+\frac{17,25}{EI}=\frac{21,75}{EI}=\delta_{2\Sigma}$$

En consecuencia, los desplazamientos han sido calculados correctamente.

Reemplazamos los valores calculados en el sistema de ecuaciones (c):

$$\left(m.\frac{9}{EI}-\lambda\right).a_1+3m.\frac{4,5}{EI}.a_2=0$$

$$m.\frac{4,5}{EI}.a_1+\left(3m.\frac{17,25}{EI}-\lambda\right).a_2=0$$

Para hacer más sencilla la fórmula, lo multiplicamos por $\frac{EI}{m}$ y reemplazamos:

$$\overline{\lambda}=\frac{EI}{m}.\lambda=\frac{EI}{m\omega^2} \qquad \text{(h)}$$

Como resultado obtenemos:

$$(9-\overline{\lambda})a_1+13,5a_2=0 \qquad \text{(i)}$$

$$4,5a_1+(51,75-\overline{\lambda})a_2=0$$

De esta manera, el determinante será:

$$Det=\begin{vmatrix}(9-\overline{\lambda}) & 13,5\\ 4,5 & (51,75-\overline{\lambda})\end{vmatrix}=0$$

Desarrollando el determinante tenemos:

$$Det=(9-\overline{\lambda})(51,75-\overline{\lambda})-13,5.4,5=0$$

$$\overline{\lambda}^2-60,75\overline{\lambda}+405=0$$

De donde:

$$\overline{\lambda}_1=53,127$$

$$\overline{\lambda}_2=7,623$$

Luego:

$$\lambda_1=53,127\frac{m}{EI}$$

$$\lambda_2=7,623\frac{m}{EI}$$

Comprobamos el correcto cálculo de los valores propios de la matriz K, según la fórmula 10.7:

$$K = \begin{bmatrix} 9 & 13,5 \\ 4,5 & 51,75 \end{bmatrix} \quad \text{(j)}$$

1. $\sum \bar{\lambda}_j = 53,127 + 7,623 = 60,750$

$Sp\|K\| = 9 + 51,75 = 60,750$

2. $\prod_{j=1}^{2} \bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}_1 . \bar{\lambda}_2 = 53,127.7,623 = 404,987$

$$Det\|K\| = \begin{vmatrix} 9 & 13,5 \\ 4,5 & 51,75 \end{vmatrix} = 9.51,75 - 13,5.4,5 = 405,000$$

Calculamos el error porcentual:

$$\varepsilon = \frac{405 - 404,987}{405}.100\% = 0,003\%$$

Calculamos las frecuencias circulares por la fórmula 10.12:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EI}{m.53,127}} = 0,137\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{(k)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EI}{m.7,623}} = 0,362\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Para calcular los componentes del vector propio de la primera forma de vibración, reemplazamos el valor $\bar{\lambda}_1 = 53,127$ en la ecuación (i):

$$(9 - 53,127)a_1 + 13,5a_2 = 0 \quad \text{(l)}$$

$$4,5a_1 + (51,75 - 53,127)a_2 = 0$$

Como el determinante de este sistema es igual a cero, una de las ecuaciones viene a ser la combinación lineal de la otra y puede ser eliminada. Por ejemplo, eliminamos la segunda ecuación y obtenemos:

$$-44,127a_1 + 13,5a_2 = 0$$

$$a_2 = \frac{44,127}{13,5}a_1 = 3,2687a_1$$

De esta manera, en la primera forma de vibración se tendrá, que si $a_{11} = 1$, entonces $a_{21} = 3,2687$.

Para calcular el vector propio de la segunda forma de vibración, reemplazamos en la ecuación (i) el valor $\bar{\lambda}_2 = 7,623$ y eliminamos la segunda ecuación:

$$(9 - 7,623)a_1 + 13,5a_2 = 0$$

$$1,377a_1 + 13,5a_2 = 0$$

$$a_2 = -\frac{1,377}{13,5}a_1 = -0,1020a_1$$

Para la segunda forma de vibración, si $a_{12} = 1$, entonces $a_{22} = -0{,}102$

Los resultados del cálculo se muestran en la tabla 10.1.

Tabla 10.1

Características de la vibración	Forma de vibración		Masas
	I	II	$\overline{m}_i$
a_1	1	1	$\overline{m}_1 = 0$
a_2	3,2687	$-0{,}1020$	$\overline{m}_2 = 3m$
ω	$0{,}137\sqrt{\frac{EI}{m}}$	$0{,}362\sqrt{\frac{EI}{m}}$	———
λ	$53{,}127\frac{m}{EI}$	$7{,}623\frac{m}{EI}$	———

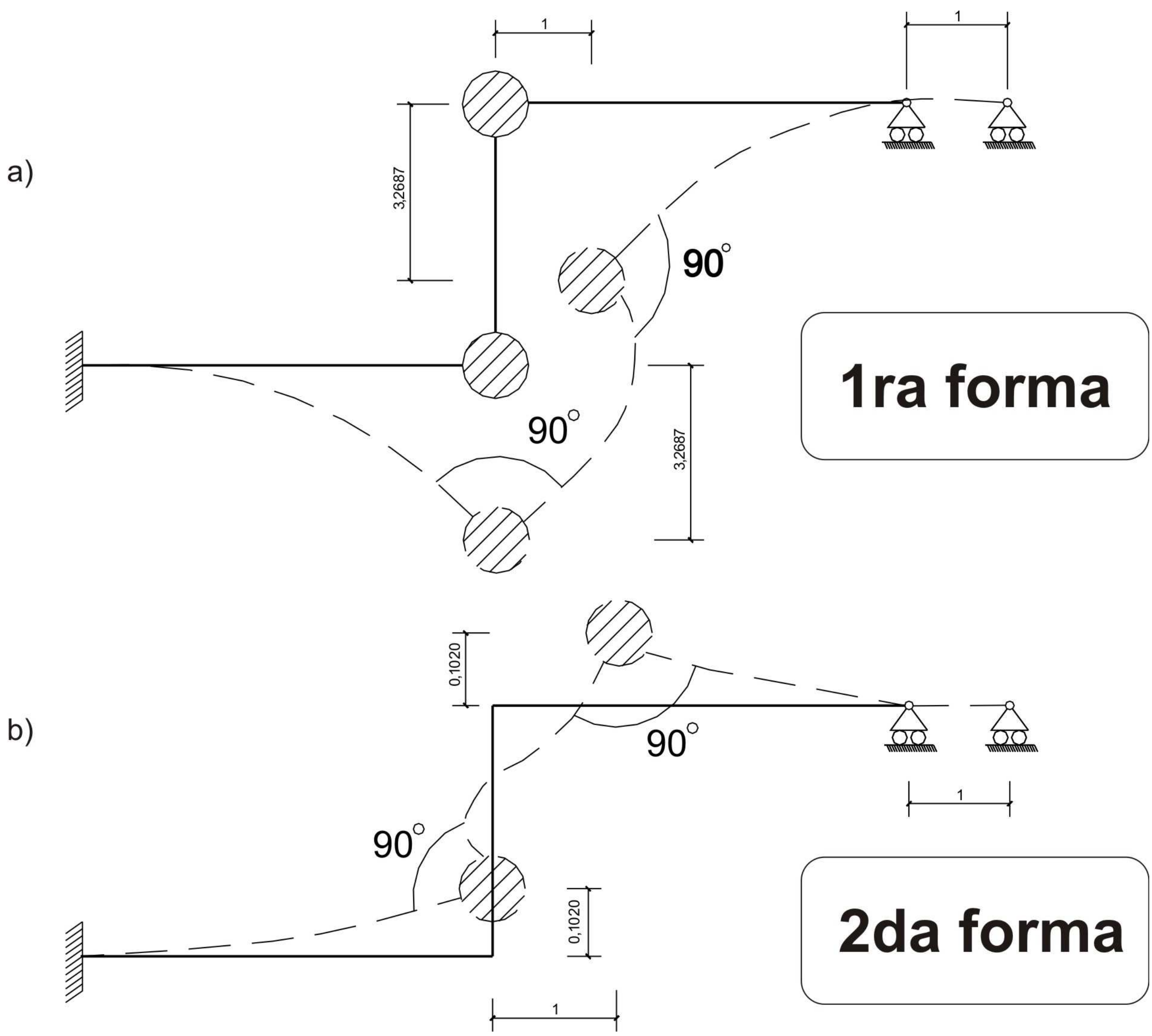


Fig. 10.8

A través de la fórmula 10.11 comprobamos sus correspondientes valores y vectores propios:

$$K.V_1 = \begin{bmatrix} 9 & 13,5 \\ 4,5 & 51,75 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3,2687 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,127 \\ 173,655 \end{bmatrix} = 53,127. \begin{bmatrix} 1 \\ 3,2687 \end{bmatrix} = \lambda_1.V_1$$

$$K.V_2 = \begin{bmatrix} 9 & 13,5 \\ 4,5 & 51,75 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -0,1020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,623 \\ -0,778 \end{bmatrix} = 7,623 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,1020 \end{bmatrix} = \lambda_2.V_2$$

Realizamos la comprobación de ortogonalidad de las formas de vibración, a través de la fórmula 10.13.

$$m.1.1 + 3m.3,2687.(-0,1020) = m - 1,0002m = -0,0002m \approx 0$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{0,0002}{1}.100\% = 0,022\%$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, las formas principales de vibración, son las mostradas en la figura 10.8.

CALCULO DE VIBRACIONES FORZADAS

El sistema de ecuaciones lineales 10.16 para el pórtico dado, tendrá la forma:

$$\left(\delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2}\right)B_1 + \delta_{12}B_2 + \delta_{1P}P_0 = 0 \qquad \text{(m)}$$

$$\delta_{21}B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{3m\theta^2}\right)B_2 + \delta_{2P}P_0 = 0$$

Para calcular los coeficientes de carga, será necesario graficar el diagrama M_P, debido a la acción de la fuerza $P_0 = 1$. Como este diagrama ya ha sido graficado (figura 10.6) y $M_P = M_2$, se tendrá:

$$\delta_{1P} = \delta_{12} = \frac{4,5}{EI}$$

$$\delta_{2P} = \delta_{22} = \frac{17,25}{EI}$$

Ahora calculamos las magnitudes:

$$\frac{1}{m\theta^2} = \frac{1}{m(0,8\omega_1)^2} = \frac{\lambda_1}{0,64m} = \frac{53,127\frac{m}{EI}}{0,64m} = \frac{83,011}{EI}$$

$$\frac{1}{3m\theta^2} = \frac{1}{3}.\frac{83,011}{EI} = \frac{27,670}{EI}$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la fórmula (m):

$$\left(\frac{9}{EI} - \frac{83,011}{EI}\right)B_1 + \frac{4,5}{EI}.B_2 + \frac{4,5}{EI}.1,2 = 0$$

$$\frac{4,5}{EI}.B_1 + \left(\frac{17,25}{EI} - \frac{27,670}{EI}\right)B_2 + \frac{17,25}{EI}.1,2 = 0$$

Multiplicamos ambas ecuaciones por EI, obteniendo:

$$-74{,}011B_1 + 4{,}5B_2 + 5{,}4 = 0 \qquad \text{(n)}$$

$$4{,}5B_1 - 10{,}42B_2 + 20{,}7 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (n) y obtenemos:

$$B_1 = 0{,}199\text{kN}$$

$$B_2 = 2{,}072\text{kN}$$

Graficamos el diagrama de momento flector por la fórmula 10.17 de la suma de las acciones.

$$M_{din} = 0{,}199M_1 + 2{,}072M_2 + 1{,}2M_P = 0{,}199M_1 + 3{,}272M_2$$

Los diagramas de cada acción, así como el diagrama final M_{din} se muestran en la figura 10.9.

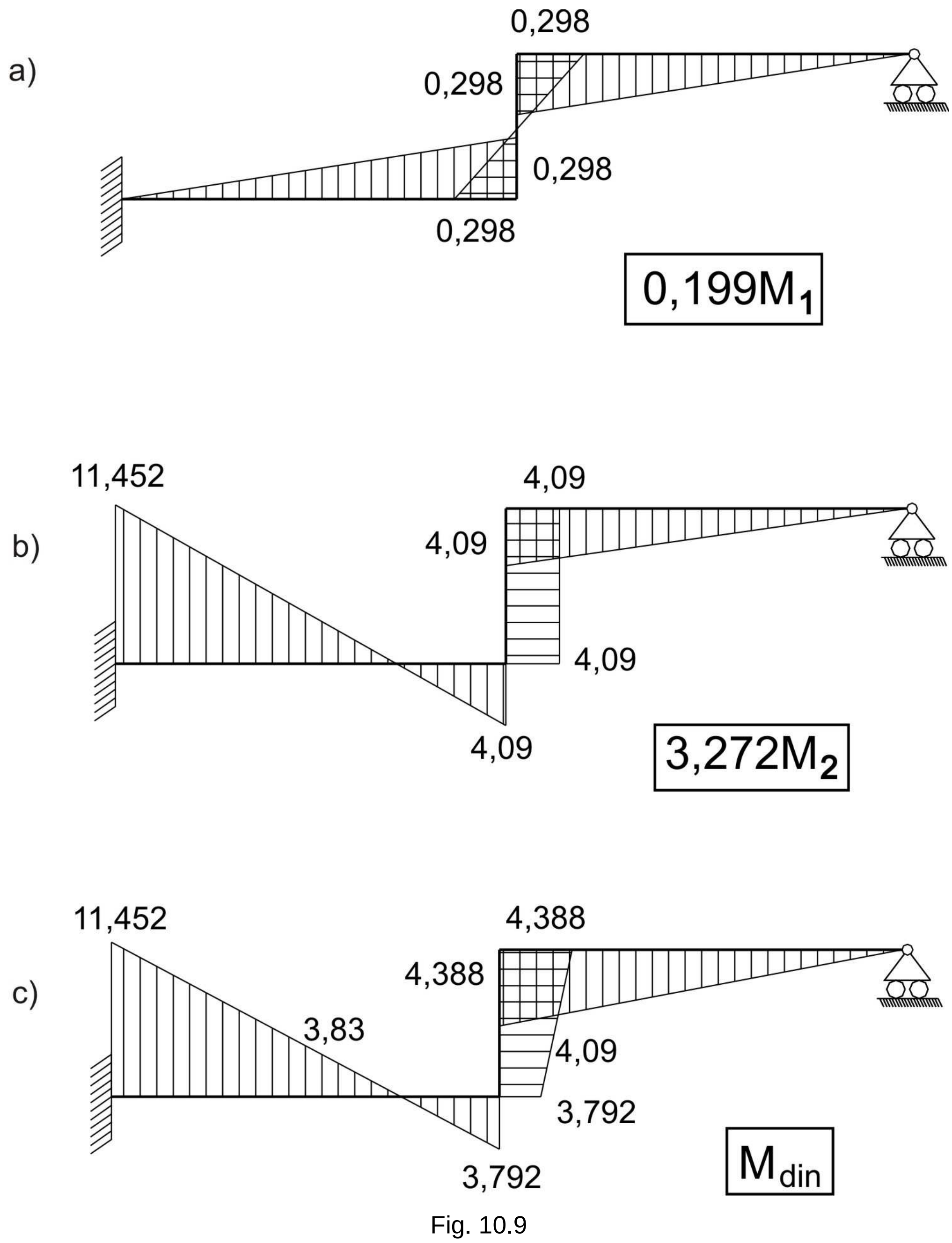


Fig. 10.9

Calculamos las amplitudes de los desplazamientos de las masas, a través de la fórmula 10.18.

$$A_1 = \frac{B_1}{\overline{m}_1 \theta^2} = \frac{B_1 \lambda_1}{m.0,64} = \frac{0,199.53,127\dfrac{m}{EI}}{m.0,64} = \frac{16,519}{EI}$$

$$A_2 = \frac{B_2}{\overline{m}_2 \theta^2} = \frac{B_2 \lambda_1}{3m.0,64} = \frac{2,072.53,127\dfrac{m}{EI}}{3m.0,64} = \frac{57,333}{EI}$$

Para comprobar, calculamos los desplazamientos de las masas por la fórmula de Mohr:

$$A_1 = \Delta_{1d} = \sum \int_L \frac{M_1 M_{din}}{EI} dx = \sum \int_L \frac{M_{P1} M_{din}}{EI} dx = \frac{1}{2EI}.3.6.3,83 - \frac{3}{6EI}(3.3,792 + 4.1,5.4,09 + 0)$$

$$A_1 = \frac{16,512}{EI}$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{16,519 - 16,512}{16,519}.100\% = 0,042\%$$

Asimismo:

$$A_2 = \Delta_{2d} = \sum \int_L \frac{M_2 M_{din}}{EI} dx = \sum \int_L \frac{M_{P2} M_{din}}{EI} dx = \frac{6}{6.2EI}(6.11,452 + 4.3.3,83 + 0) = \frac{57,336}{EI}$$

El error porcentual es:

$$\varepsilon = \frac{57,336 - 57,333}{57,333}.100\% = 0,005\%$$

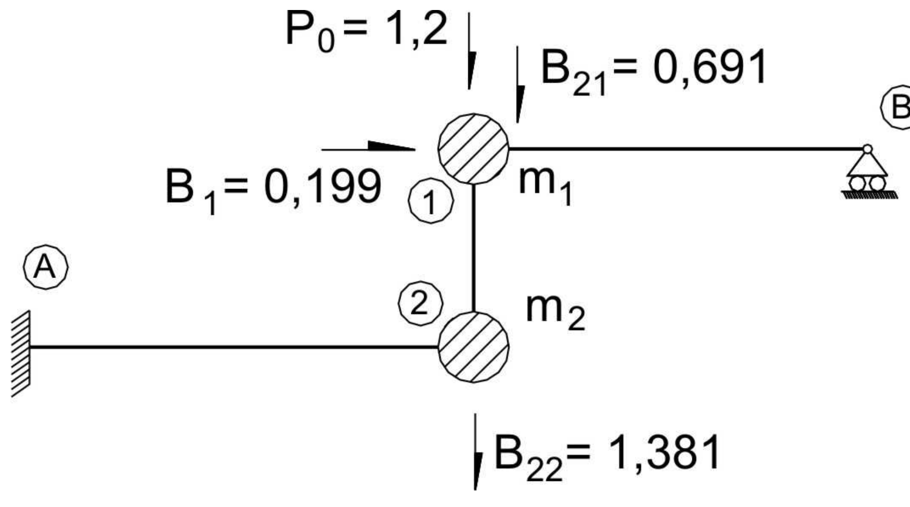


Fig. 10.10

En la figura 10.10 se muestran los valores de la amplitud de las fuerzas de inercia y la carga externa aplicadas en el pórtico. Para ello, la fuerza B_2, relacionada con las masas m_1 y m_2, se distribuye proporcionalmente a estas masas.

$$B_{21} = B_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 2,072.\frac{m}{m + 2m} = 0,691kN$$

$$B_{22} = B_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}072.\frac{2m}{m + 2m} = 1{,}381kN$$

El diagrama V_{din} lo graficamos a través del diagrama M_{din} y en base a la dependencia diferencial

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$V_{A2} = V_{2A} = \frac{11{,}452 + 3{,}792}{6} = 2{,}541kN$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{4{,}388 - 3{,}792}{3} = 0{,}199kN$$

$$V_{1B} = V_{B1} = -\frac{4{,}388}{6} = -0{,}731kN$$

El diagrama final V_{din} se muestra en la figura 10.11.

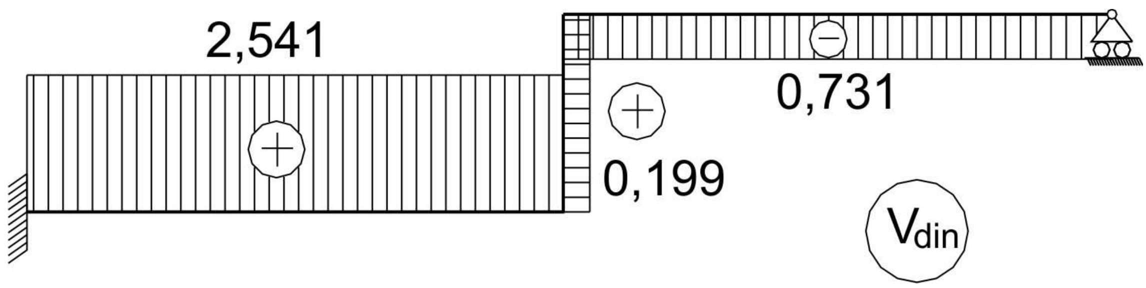


Fig. 10.11

El diagrama de fuerzas axiales N_{din} lo graficamos a través del diagrama V_{din}, analizando el equilibrio de los nudos del pórtico.

NUDO 1

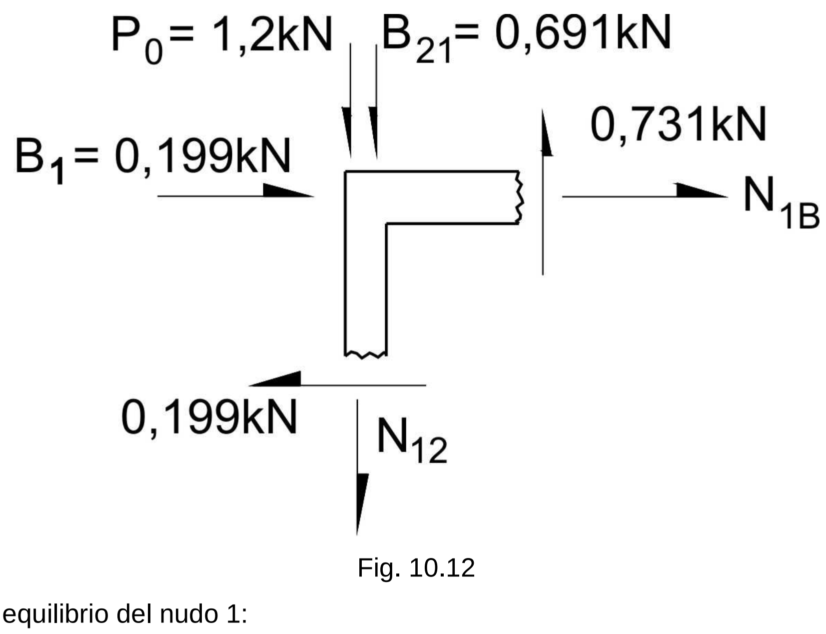


Fig. 10.12

Analizamos el equilibrio del nudo 1:

$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{1B} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{12} + 0{,}731 - 1{,}2 - 0{,}691 = 0$$

$$N_{12} = -1{,}160kN$$

NUDO 2

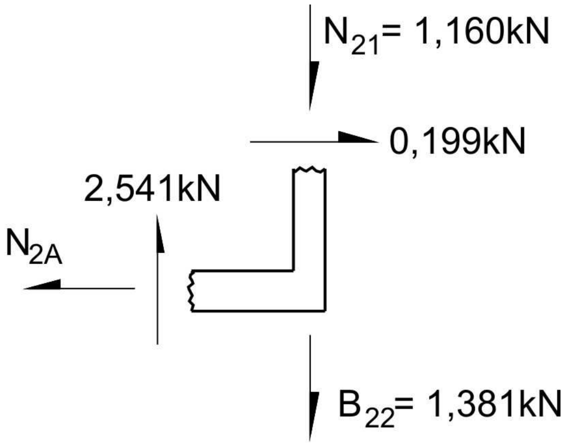


Fig. 10.13

Analizamos el equilibrio del nudo 2:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{2A} = 0{,}199kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2{,}541 - 1{,}381 - 1{,}160 = 0$$

El diagrama final N_{din} se muestra en la figura 10.14.

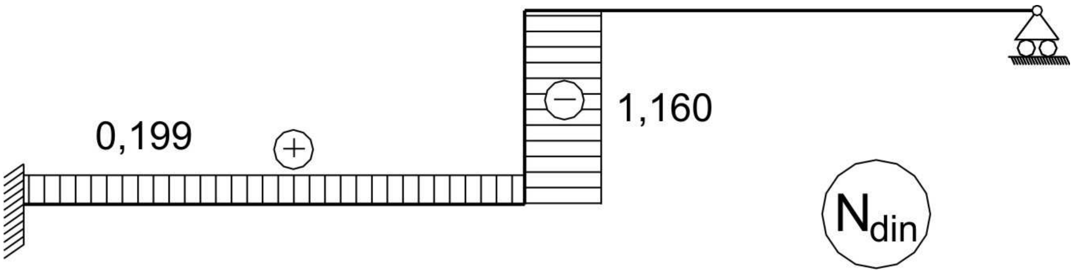


Fig. 10.14

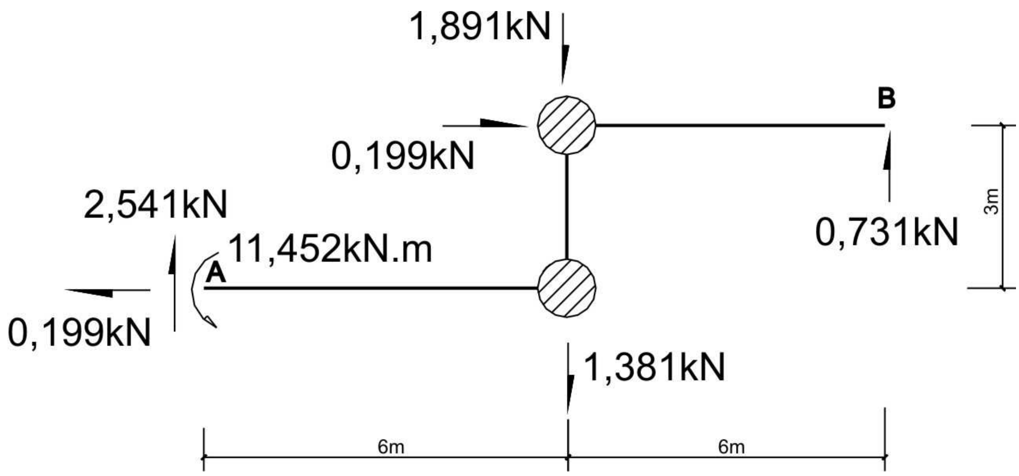


Fig. 10.15

En la figura 10.15, se muestra el pórtico con las cargas y reacciones, efectuando para ello la comprobación de equilibrio total del pórtico dado.

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \; -0,199 + 0,199 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \; 2,541 - 1,381 - 1,891 + 0,731 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \; -11,452 + 0,199.3 + 2,541.12 - 1,381.6 - 1,891.6 = 31,089 - 31,084 = 0,005$$

El error porcentual será:

$$\varepsilon = \frac{0,005}{31,089}.100\% = 0,016\%$$

BIBLIOGRAFIA

1. **Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.** Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 679с.
2. **Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.** Основы строительной механики стержневых систем. – М.: АСВ, 1996. – 541с.
3. **Саргсян А.Е.** Строительная механика. Механика инженерных конструкций. – М.: Высшая школа, 2004. – 462с.
4. **Kiseliov V.A.** Mecánica de construcción. Curso especial de dinámica y estabilidad de las estructuras. Editorial Mir. Moscú, 1983. – 548p.
5. **Programa BEAM.** Moscow State Civil Engineering University. Moscú, 2003.
6. **Reglamento Nacional de Edificaciones.** Instituto de la Construcción y Gerencia. Lima, Perú, 2006.
7. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 135p.
10. **Villarreal Castro Genner / Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 155p.

ANEXO

Tabla 1

Funciones del académico A.N. Krilov

β.x	A	B	C	D
0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
0,005	1,0	0,005	0,00002	0,00000
0,010	1,0000	0,0100	0,00005	0,00000
0,015	1,0000	0,0150	0,00012	0,00000
0,020	1,0000	0,0200	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,15	0,9999	0,1500	0,0113	0,0006
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,25	0,9993	0,2500	0,0313	0,0026
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,35	0,9975	0,3498	0,0613	0,0072
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,45	0,9932	0,4494	0,1012	0,0152
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,55	0,9847	0,5484	0,1511	0,0277
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,65	0,9703	0,6462	0,2109	0,0457
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,75	0,9473	0,7421	0,2803	0,0702
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,85	0,9131	0,8352	0,3592	0,1021
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
0,95	0,8645	0,9242	0,4472	0,1424
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1.05	0,7980	1,0076	0,5438	0,1918
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,15	0,7097	1,0831	0,6484	0,2514
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,25	0,5955	1,1486	0,7601	0,3218
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,35	0,4508	1,2012	0,8777	0,4036
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,45	0,2710	1,2376	0,9998	0,4974

1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
1,51	0,1442	1,2501	1,0745	0,5597
1,52	0,1216	1,2515	1,0870	0,5705
1,53	0,0986	1,2526	1,0995	0,5814
1,54	0,0746	1,2534	1,1121	0,5925
1,55	0,0512	1,2541	1,1246	0,6036
1,56	0,0268	1,2545	1,1371	0,6149
1,57	0,0020	1,2546	1,1497	0,6264
π/2	0,0	1,2546	1,1507	0,6273
1,58	-0,0233	1,2545	1,1622	0,6380
1,59	-0,0490	1,2542	1,1748	0,6496
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,61	-0,1019	1,2526	1,1998	0,6734
1,62	-0,1291	1,2515	1,2124	0,6854
1,63	-0,1568	1,2501	1,2249	0,6976
1,64	-0,1849	1,2484	1,2374	0,7099
1,65	-0,2136	1,2464	1,2498	0,7224
1,70	-0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,75	-0,5284	1,2097	1,3727	0,8535
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,85	-0,8980	1,1389	1,4906	0,9968
1,90	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
1,95	-1,3273	1,0281	1,5993	1,1514
2,00	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,05	-1,8205	0,8713	1,6947	1,3162
2,10	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,15	-2,3814	0,6618	1,7718	1,4897
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,25	-3,0131	0,3926	1,8251	1,6698
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,31	-3,4270	0,1996	1,8430	1,7798
2,32	-3,4986	0,1649	1,8448	1,7983
2,33	-3,5708	0,1296	1,8462	1,8167
2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,35	-3,7177	0,0567	1,8481	1,8537
2,36	-3,7922	0,0191	1,8485	1,8722
2,37	-3,8675	-0,0192	1,8485	1,8906
2,38	-3,9435	-0,0583	1,8481	1,9091
2,39	-4,0202	-0,0981	1,8473	1,9276
2,40	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461

2,45	-4,4961	-0,3534	1,8339	2,0381
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
2,55	-5,3477	-0,8450	1,7747	2,2190
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065
2,65	-6,2701	-1,4253	1,6620	2,3913
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5827	2,4725
2,75	-7,2588	-2,1012	1,4865	2,5493
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,85	-8,3067	-2,8790	1,2383	2,6862
2,90	-8,8471	-3,3079	1,0838	2,7443
2,95	-9,4039	-3,7642	0,9071	2,7942
3,00	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
3,05	-10,5317	-4,7611	0,4817	2,8644
3,10	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8823
3,11	-11,2272	-5,4139	0,1767	2,8844
3,12	-11,3427	-5,5268	0,1220	2,8859
3,13	-11,4580	-5,6408	0,0662	2,8868
3,14	-11,5736	-5,7560	0,0092	2,8872
π	-11,5919	-5,7744	0,0	2,8872
3,15	-11,6890	-5,8722	-0,0490	2,8870
3,16	-11,8045	-5,9898	-0,1083	2,8862
3,17	-11,9200	-6,1084	-0,1688	2,8848
3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2305	2,8828
3,19	-12,1506	-6,3491	-0,2934	2,8802
3,20	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,25	-12,8388	-7,0988	-0,6966	2,8507
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,35	-13,9601	-8,4390	-1,4725	2,7434
3,40	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
3,45	-15,0222	-9,8888	-2,3880	2,5516
3,50	-15,5200	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,55	-15,9881	-11,4403	-3,4537	2,2608
3,60	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
3,65	-16,8155	-13,0819	-4,6791	1,8555
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
3,75	-17,4552	-14,7972	-6,0725	1,3194
3,80	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
3,85	-17,8513	-16,5649	-7,6403	0,6352
3,90	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
3,91	-17,9464	-17,6393	-8,6664	0,1464

3,92	-17,9504	-17,8188	-8,8437	0,0587
3,93	-17,9511	-17,9983	-9,0227	-0,0305
3,94	-17,9480	-18,1779	-9,2037	-0,1217
3,95	-17,9412	-18,3572	-9,3863	-0,2147
3,96	-17,9307	-18,5366	-9,5708	-0,3095
3,97	-17,9165	-18,7159	-9,7571	-0,4061
3,98	-17,8983	-18,8949	-9,9451	-0,5046
3,99	-17,8761	-19,0738	-10,1350	-0,6050
4,00	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,05	-17,6551	-20,1406	-11,3115	-1,2481
4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8395
4,15	-16,9160	-21,8731	-13,4127	-2,4828
4,20	-16,3505	-22,7055	-14,5274	-3,1812
4,25	-15,6398	-23,5059	-15,6827	-3,9362
4,30	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
4,35	-13,7357	-24,9802	-18,1086	-5,6245
4,36	-13,5070	-25,1164	-18,3591	-5,8069
4,37	-13,2712	-25,2500	-18,6110	-5,9916
4,38	-13,0276	-25,3819	-18,8642	-6,1792
4,39	-12,7766	-25,5108	-19,1185	-6,3690
4,40	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,41	-12,2517	-25,7612	-19,6313	-6,7566
4,42	-11,9776	-25,8824	-19,8875	-6,9541
4,43	-11,6625	-26,0007	-20,1489	-7,1543
4,44	-11,4051	-26,1161	-20,4095	-7,3571
4,45	-11,1069	-26,2074	-20,6712	-7,5517
4,46	-10,8003	-26,3884	-20,9341	-7,7705
4,47	-10,4851	-26,4448	-21,1981	-7,9812
4,48	-10,1615	-26,5480	-21,4630	-8,1945
4,49	-9,8295	-26,6479	-21,7289	-8,4104
4,50	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-8,6290
4,51	-9,1392	-26,8377	-22,2639	-8,8504
4,52	-8,7805	-26,9272	-22,5327	-9,0744
4,53	-8,4133	-27,0132	-22,8023	-9,3010
4,54	-8,0368	-27,0957	-23,0730	-9,5304
4,55	-7,6509	-27,1740	-23,3442	-9,7624
4,56	-7,2556	-27,2485	-23,6164	-9,9973
4,57	-6,8510	-27,3192	-23,8892	-10,2348
4,58	-6,4366	-27,3855	-24,1628	-10,4751
4,59	-6,0127	-27,4477	-24,4369	-10,7181

4,60	-5,5791	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,61	-5,1358	-27,5593	-24,9870	-11,2123
4,62	-4,8237	-27,6086	-25,2630	-11,4636
4,63	-4,2189	-27,6531	-25,5392	-11,7175
4,64	-3,7450	-27,6928	-25,8159	-11,9743
4,65	-3,2607	-27,7277	-26,0929	-12,2338
4,66	-2,7663	-27,7581	-26,3705	-12,4962
4,67	-2,2611	-27,7831	-26,6481	-12,7612
4,68	-1,7449	-27,8032	-26,9262	-13,0293
4,69	-1,2187	-27,8181	-27,2042	-13,2998
4,70	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5732
4,71	-0,1327	-27,8317	-27,7608	-13,8495
3π/2	0,0	-27,8317	-27,8272	-13,9159
4,72	0,4268	-27,8391	-28,0390	-14,1284
4,73	0,9976	-27,8228	-28,3172	-14,4102
4,74	1,5799	-27,8101	-28,5955	-14,6948
4,75	2,1731	-27,7913	-28,8734	-14,9821
4,76	2,7782	-27,7668	-29,1514	-15,2723
4,77	3,3951	-27,7357	-29,4288	-15,5652
4,78	4,0236	-27,6988	-29,7061	-15,8609
4,79	4,6638	-27,6553	-29,9828	-16,1593
4,80	5,3164	-27,6052	-30,2589	-16,4604
4,81	5,9811	-27,5488	-30,5348	-16,7645
4,82	6,6574	-27,4859	-30,8102	-17,0712
4,83	7,3466	-27,4156	-31,0845	-17,3806
4,84	8,0477	-27,3389	-31,3584	-17,6928
4,85	8,7623	-27,2547	-31,6314	-18,0079
4,86	9,4890	-27,1634	-31,9035	-18,3257
4,87	10,2282	-27,0650	-32,1747	-18,6460
4,88	10,9806	-26,9589	-32,4448	-18,9691
4,89	11,7458	-26,8452	-32,7137	-19,2948
4,90	12,5239	-26,7239	-32,9814	-19,6232
4,91	13,3158	-26,5846	-33,2482	-19,9545
4,92	14,1202	-26,4578	-33,5135	-20,2882
4,93	14,9388	-26,3123	-33,7774	-20,6248
4,94	15,7704	-26,1588	-34,0397	-20,9638
4,95	16,6157	-25,9967	-34,3003	-21,3054
4,96	17,4750	-25,8262	-34,5595	-21,6498
4,97	18,3478	-25,6472	-34,8168	-21,9966
4,98	19,2348	-25,4594	-35,0726	-22,3462

4,99	20,1356	-25,2623	-35,3259	-22,6981
5,00	21,0504	-25,0565	-35,5775	-23,0525
5,01	21,9800	-24,8413	-35,8272	-23,4097
5,02	22,8474	-24,6170	-36,0745	-23,7691
5,03	23,8815	-24,3827	-36,3193	-24,1311
5,04	24,8537	-24,1392	-36,5619	-24,4954
5,05	25,8407	-23,8860	-36,8023	-24,8623
5,06	26,8427	-23,6225	-37,0398	-25,2315
5,07	27,8598	-23,3489	-37,2748	-25,6033
5,08	28,8914	-23,0651	-37,5068	-25,9771
5,09	29,9377	-22,7711	-37,7360	-26,3533
5,10	30,9997	-22,4661	-37,9619	-26,7317
5,11	32,0766	-22,1509	-38,1852	-27,1126
5,12	33,1687	-21,8246	-38,4051	-27,4955
5,13	34,2762	-21,4874	-38,6216	-27,8806
5,14	35,3991	-21,1391	-38,8348	-28,2679
5,15	36,5377	-20,7795	-39,0445	-28,6574
5,16	37,6913	-20,4084	-39,2502	-29,0486
5,17	38,8617	-20,0254	-39,4525	-29,4423
5,18	40,0474	-19,6310	-39,6509	-29,8379
5,19	41,2485	-19,2248	-39,8453	-30,2354
5,20	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,21	43,6994	-18,3754	-40,2214	-31,0361
5,22	44,9486	-17,9322	-40,4028	-31,4391
5,23	46,2148	-17,4758	-40,5796	-31,8440
5,24	47,4958	-17,0073	-40,7521	-32,2504
5,25	48,7949	-16,5258	-40,9197	-32,6590
5,26	50,1091	-16,0317	-41,0826	-33,0690
5,27	51,4399	-15,5240	-41,2404	-33,4806
5,28	52,7876	-15,0030	-41,3932	-33,8939
5,29	54,1511	-14,4684	-41,5405	-34,3084
5,30	55,5317	-13,9201	-41,6826	-34,7246
5,31	56,6296	-13,3574	-41,8187	-35,1421
5,32	58,3438	-12,7808	-41,9493	-35,5609
5,33	59,7745	-12,1903	-42,0742	-35,9810
5,34	61,2218	-11,5856	-42,1932	-36,4023
5,35	62,6869	-10,9660	-42,3061	-36,8250
5,36	64,1678	-10,3321	-42,4126	-37,2485
5,37	65,6657	-9,6823	-42,5124	-37,6731
5,38	67,1818	-9,0184	-42,6060	-38,0986

5,39	68,7140	-8,3390	-42,6928	-38,5251
5,40	70,2637	-7,6440	-42,7727	-38,9524
5,41	71,8308	-6,9336	-42,8459	-39,3808
5,42	73,4144	-6,2076	-42,9117	-39,8096
5,43	75,0158	-5,4652	-42,9700	-40,2390
5,44	76,6338	-4,7072	-43,0210	-40,6691
5,45	78,2687	-3,9328	-43,0642	-41,0993
5,46	79,9216	-3,1418	-43,0997	-41,5303
5,47	81,5916	-2,3340	-43,1268	-41,9613
5,48	83,2786	-1,5095	-43,1459	-42,3926
5,49	84,9829	-0,6683	-43,1568	-42,8241
5,50	86,7044	0,1901	-43,1593	-43,2557
5,51	88,4432	1,0656	-43,1531	-43,6874
5,52	90,1996	1,9589	-43,1381	-44,1189
5,53	91,9722	2,8693	-43,1141	-44,5500
5,54	93,7637	3,7984	-43,0807	-44,9812
5,55	95,5716	4,7453	-43,0378	-45,4117
5,56	97,3960	5,7095	-42,9858	-45,8418
5,57	99,2383	6,6927	-42,9238	-46,2714
5,58	101,0984	7,6950	-42,8516	-46,7003
5,59	102,9739	8,7148	-42,7695	-47,1281
5,60	104,8687	9,7544	-42,6775	-47,5558
5,61	106,7790	10,8125	-42,5744	-47,9818
5,62	108,7074	11,8903	-42,4609	-48,4071
5,63	110,6512	12,9865	-42,3366	-48,8309
5,64	112,6133	14,1029	-42,2013	-49,2538
5,65	114,5922	15,2390	-42,0547	-49,6752
5,66	116,5866	16,3950	-41,8959	-50,0944
5,67	118,5994	17,5706	-41,7277	-50,5130
5,68	120,6277	18,7666	-41,5449	-50,9292
5,69	122,6730	19,9835	-41,3507	-51,3434
5,70	124,7352	21,2199	-41,1454	-51,7563
5,71	126,8144	22,4785	-40,9265	-52,1666
5,72	128,9091	23,7571	-40,6952	-52,5746
5,73	131,0207	25,0568	-40,4514	-52,9806
5,74	133,1478	26,2810	-40,1365	-53,3359
5,75	135,2903	27,7192	-39,9238	-53,7842
5,76	137,4497	29,0832	-39,6396	-54,1819
5,77	139,6260	30,4693	-39,3416	-54,5770
5,78	141,8144	31,8755	-39,0304	-54,9689

5,79	144,0228	33,3053	-38,7041	-55,3574
5,80	146,2448	34,7564	-38,3640	-55,7429
5,81	148,4819	36,2301	-38,0089	-56,1246
5,82	150,7340	37,7256	-37,6395	-56,5029
5,83	153,0028	39,2449	-37,2545	-56,8776
5,84	155,2847	40,7859	-36,8546	-57,2481
5,85	157,5988	42,3504	-36,4385	-57,6143
5,86	159,8947	43,9378	-36,0077	-57,9772
5,87	162,2208	45,5484	-35,5601	-58,3349
5,88	164,5613	47,1825	-35,0964	-58,6882
5,89	166,9145	48,8394	-34,6161	-59,0363
5,90	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,3805
5,91	171,6653	52,2255	-33,6055	-59,7187
5,92	174,0609	53,9542	-33,0746	-60,0521
5,93	176,0704	55,7067	-32,5268	-60,3806
5,94	178,8917	57,4833	-31,9609	-60,7030
5,95	181,3266	59,2852	-31,3765	-61,0195
5,96	183,7730	61,7303	-30,7751	-61,0201
5,97	186,2326	63,3087	-30,1546	-61,4608
5,98	188,7034	64,8347	-29,5155	-61,9332
5,99	191,1870	66,7344	-28,8575	-62,2251
6,00	193,6813	68,6578	-28,2116	-62,5206
6,01	196,1881	70,6079	-27,4846	-62,7889
6,02	198,7051	72,5822	-26,7689	-63,0603
6,03	201,2322	74,5817	-26,0330	-63,3241
6,04	203,7710	76,6067	-25,2774	-63,5810
6,05	206,3194	78,6574	-24,5009	-63,8299
6,06	208,8770	80,7331	-23,7041	-64,0708
6,07	211,4435	82,8350	-22,8855	-64,3032
6,08	214,0209	84,9622	-22,0469	-64,5282
6,09	216,6066	87,1150	-21,1870	-64,7447
6,10	219,2004	89,2947	-20,3043	-64,9519
6,11	221,8019	91,4992	-19,4005	-65,1503
6,12	224,4109	93,7300	-18,4743	-65,3394
6,13	227,0292	95,9871	-17,5263	-65,5200
6,14	229,6542	98,2709	-16,5551	-65,6909
6,15	232,2833	100,5538	-15,5602	-65,8372
6,16	234,9208	102,9168	-14,5425	-66,0010
6,17	237,5639	105,2793	-13,5016	-66,1413
6,18	240,2122	107,6680	-12,4370	-66,2711

6,19	242,8654	110,0832	-11,3485	-66,3901
6,20	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,21	248,1847	114,9934	-9,0980	-66,5947
6,22	250,8499	117,4888	-7,9352	-66,6796
6,23	253,5208	120,0113	-6,7481	-66,7538
6,24	256,1917	122,5599	-5,5350	-66,8150
6,25	258,8649	125,1350	-4,2969	-66,8640
6,26	261,5398	127,7369	-3,0321	-66,9005
6,27	264,2159	130,3657	-1,7414	-66,9242
6,28	266,8926	133,0195	-0,4257	-66,9354
2π	267,7468	135,8725	0,0	-66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	-66,9175
6,40	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	-63,3105
6,60	349,2554	231,8801	57,2528	-58,6870
6,70	371,4244	267,9374	82,2255	-51,7430
6,80	390,2947	306,0558	110,9087	-42,1190
6,90	404,7145	347,3499	143,4927	-30,1819
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	-13,2842

Tabla 2

Coeficientes de barras flexo-comprimidas para fórmulas por el método de desplazamientos

ν	α	β	$\alpha+\beta$	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	$\frac{\nu}{tg\nu}$	$\frac{\nu}{sen\nu}$	$\nu tg\nu$
0,0	2,000	1,000	3,000	6,000	3,000	3,000	1,000	1,000	0,000
0,1	1,999	1,000	2,999	5,994	2,998	2,988	0,997	1,002	0,010
0,2	1,997	1,001	2,998	5,976	2,992	2,952	0,987	1,006	0,040
0,3	1,994	1,001	2,995	5,946	2,982	2,892	0,970	1,015	0,093
0,4	1,989	1,003	2,992	5,904	2,968	2,808	0,946	1,027	0,169
0,5	1,983	1,004	2,987	5,850	2,950	2,700	0,915	1,043	0,273
0,6	1,976	1,006	2,982	5,784	2,927	2,567	0,877	1,063	0,410
0,7	1,967	1,008	2,975	5,706	2,901	2,411	0,831	1,086	0,590
0,8	1,957	1,011	2,968	5,616	2,869	2,229	0,777	1,115	0,824
0,9	1,945	1,014	2,959	5,513	2,834	2,024	0,714	1,149	1,134
1,0	1,932	1,017	2,950	5,399	2,794	1,794	0,642	1,188	1,557
1,1	1,918	1,021	2,939	5,273	2,749	1,539	0,560	1,234	2,161
1,2	1,902	1,025	2,927	5,134	2,699	1,259	0,466	1,287	3,086
1,3	1,885	1,030	2,914	4,984	2,644	0,954	0,361	1,349	4,683
1,4	1,866	1,035	2,901	4,821	2,584	0,624	0,241	1,421	8,117
1,5	1,845	1,040	2,886	4,628	2,511	0,268	0,106	1,504	21,152
1,6	1,823	1,046	2,870	4,459	2,446	-0,114	-0,047	1,601	-54,772
1,7	1,800	1,053	2,852	4,260	2,367	-0,523	-0,221	1,714	-13,084
1,8	1,774	1,060	2,834	4,048	2,282	-0,958	-0,420	1,848	-7,715
1,9	1,747	1,068	2,815	3,824	2,189	-1,421	-0,649	2,008	-5,561
2,0	1,718	1,076	2,794	3,588	2,088	-1,912	-0,915	2,199	-4,370
2,1	1,687	1,085	2,772	3,339	1,979	-2,431	-1,228	2,433	-3,591
2,2	1,654	1,095	2,749	3,078	1,861	-2,979	-1,601	2,721	-3,002
2,3	1,620	1,105	2,725	2,805	1,732	-3,558	-2,055	3,084	-2,574
2,4	1,583	1,116	2,699	2,519	1,591	-4,169	-2,620	3,553	-2,198
2,5	1,544	1,129	2,672	2,220	1,438	-4,812	-3,347	4,177	-1,868
2,6	1,503	1,142	2,644	1,909	1,270	-5,490	-4,302	5,044	-1,564
2,7	1,459	1,156	2,615	1,585	1,086	-6,204	-5,711	6,318	-1,276
2,8	1,413	1,171	2,584	1,248	0,883	-6,957	-7,876	8,358	-0,995
2,9	1,364	1,188	2,552	0,898	0,659	-7,751	-11,769	12,121	-0,715
3,0	1,312	1,206	2,518	0,536	0,408	-8,592	-21,046	21,258	-0,428
3,1	1,257	1,225	2,482	0,160	0,127	-9,483	-74,489	74,554	-0,129
3,2	1,199	1,246	2,446	-0,229	-0,191	-10,431	54,725	-54,725	0,187
3,3	1,138	1,269	2,407	-0,630	-0,554	-11,444	20,658	-20,920	0,527
3,4	1,073	1,294	2,367	-1,046	-0,974	-12,534	12,863	-13,305	0,899
3,5	1,004	1,321	2,325	-1,474	-1,468	-13,718	9,344	-9,978	1,311

3,6	0,931	1,351	2,282	-1,916	-2,059	-15,019	7,295	-8,135	1,776
3,7	0,853	1,383	2,236	-2,372	-2,781	-16,471	5,922	-6,983	2,311
3,8	0,770	1,419	2,189	-2,842	-3,691	-18,131	4,912	-6,211	2,939
3,9	0,681	1,458	2,140	-3,325	-4,881	-20,091	4,116	-5,670	3,695
4,0	0,587	1,502	2,088	-3,823	-6,518	-22,518	3,455	-5,285	4,631
4,1	0,485	1,550	2,035	-4,335	-8,941	-25,751	2,880	-5,010	5,836
4,2	0,375	1,604	1,979	-4,862	-12,947	-30,587	2,362	-4,819	7,467
4,3	0,257	1,664	1,921	-5,403	-20,984	-39,474	1,881	-4,693	9,829
4,4	0,130	1,731	1,861	-5,959	-45,981	-65,341	1,421	-4,624	13,624
4,5	-0,009	1,807	1,797	-6,530	683,787	663,537	0,970	-4,603	20,868
4,6	-0,162	1,893	1,732	-7,117	44,008	22,848	0,519	-4,629	40,757
4,7	-0,329	1,992	1,663	-7,719	23,456	1,366	0,058	-4,700	379,350
4,8	-0,514	2,106	1,591	-8,338	16,207	-6,833	-0,422	-4,818	-54,647
4,9	-0,721	2,237	1,516	-8,973	12,439	-11,571	-0,930	-4,987	-25,811
5,0	-0,954	2,392	1,438	-9,624	10,084	-14,916	-1,479	-5,214	-16,903
5,1	-1,220	2,576	1,356	-10,293	8,439	-17,571	-2,082	-5,509	-12,492
5,2	-1,526	2,796	1,270	-10,979	7,196	-19,844	-2,758	-5,886	-9,805
5,3	-1,884	3,065	1,180	-11,684	6,200	-21,890	-3,530	-6,368	-7,957
5,4	-2,313	3,399	1,086	-12,408	5,365	-23,795	-4,435	-6,988	-6,575
5,5	-2,836	3,824	0,987	-13,150	4,636	-25,614	-5,524	-7,795	-5,476
5,6	-3,496	4,379	0,883	-13,913	3,980	-27,380	-6,880	-8,871	-4,558
5,7	-4,361	5,135	0,774	-14,697	3,370	-29,120	-8,640	-10,351	-3,760
5,8	-5,555	6,214	0,659	-15,503	2,791	-30,849	-11,055	-12,484	-3,043
5,9	-7,336	7,873	0,537	-16,331	2,226	-32,584	-14,636	-15,781	-2,378
6,0	-10,319	10,727	0,408	-17,183	1,665	-34,335	-20,618	-21,473	-1,746
6,1	-16,467	16,739	0,272	-18,061	1,097	-36,113	-32,926	-33,487	-1,130
6,2	-37,181	37,308	0,127	-18,965	0,510	-37,930	-74,360	-74,618	-0,517

INDICE